離散数学演習 9　解答例

1.

	○ 2	○ 3	× 4	○ 5	× 6
○ 7	× 8	× 9	× 10	11	× 12
13	× 14	× 15	× 16	17	× 18
19	× 20	× 21	× 22	23	× 24
× 25	× 26	× 27	× 28	29	× 30
31	× 32	× 33	× 34	× 35	× 36
37	× 38	× 39	× 40	41	× 42
43	× 44	× 45	× 46	47	× 48
× 49	× 50	× 51	× 52	53	× 54
× 55	× 56	× 57	× 58	59	× 60
61	× 62	× 63	× 64	× 65	× 66
67	× 68	× 69	× 70	71	× 72
73	× 74	× 75	× 76	× 77	× 78
79	× 80	× 81	× 82	83	× 84
× 85	× 86	× 87	× 88	89	× 90
× 91	× 92	× 93	× 94	× 95	× 96
97	× 98	× 99	× 100		

注意：$\sqrt{100} = 10$ より小さい素数について, その倍数に×を付ければよい.

100 以下の素数は, $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$ だから, $\pi(100) = 25$.

一方, $\dfrac{100}{\log_e 100} = \dfrac{100}{2\log_e 10} = \dfrac{100}{4.606} = 21.711$.

ゆえに, $\pi(100) \Big/ \dfrac{100}{\log_e 100} = 1.151$.

2. (1) $mn = \mathrm{lcm}(m,n)\gcd(m,n) = \mathrm{lcm}(m,n)\cdot 1 = \mathrm{lcm}(m,n)$. $n \mid nk$ であり, また, $m|nk$ だから nk は m と n の公倍数である. ゆえに, $\mathrm{lcm}(m,n) \mid nk$. すなわち, 整数 q が存在して, $nk = q\cdot \mathrm{lcm}(m,n) = qmn$. したがって, $k = qm$ だから, $m \mid k$.

   (2) $p|mn$ であるが, $p \mid m$ でも $p \mid n$ でもないと仮定する. このとき, $\gcd(p,m) = 1$ だから, (1) により, $p \mid n$. これは矛盾. ゆえに, $p \mid m$ または $p \mid n$.

3. n に関する帰納法により示す.

   （基底段階）$n = 0$ のとき.
   $F_{n+1} = F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$.
   $F_0F_1\cdots F_n + 2 = F_0 + 2 = 2^{2^0} + 1 + 2 = 2^1 + 1 + 2 = 2 + 1 + 2 = 5$.
   ゆえに, $F_{n+1} = F_0F_1\cdots F_n + 2$.

   （帰納段階）$F_{n+1} = F_0F_1\cdots F_n + 2$ と仮定する.
   このとき, $F_{n+2} = 2^{2^{n+2}} + 1 = 2^{2^{n+1}2^1} + 1 = (2^{2^{n+1}})^2 + 1 = (F_{n+1} - 1)^2 + 1 = F_{n+1}^2 - 2F_{n+1} + 2$
   $= (F_{n+1} - 2)F_{n+1} + 2$.
   ここで, 帰納法の仮定から, $F_{n+2} = (F_0F_1\cdots F_n)F_{n+1} + 2 = F_0F_1\cdots F_nF_{n+1} + 2$.

   以上から, 任意の n に対して, $F_n = F_0F_1\cdots F_{n-1} + 2$.

4. (1) n の正の約数は, $p_1^{h_1}p_2^{h_2}\cdots p_r^{h_r}$　$(0 \le h_i \le e_i, 1 \le i \le r)$ という形である. そのような h_i の選び方は $e_i + 1$ 通りあるから, 組 $(h_1, h_2, \cdots, h_r)$ の選び方は $(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_r+1)$ 通りである. 組 $(h_1, h_2, \cdots, h_r)$ が n の正の約数と 1 対 1 に対応するから, n の異なる正の約数の個数は $(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_r+1)$ である.

   (2) $p_1, p_2, \cdots, p_r$ は互いに異なる素数であるから, $\sigma(n) = \sigma(p_1^{e_1})\sigma(p_2^{e_2})\cdots\sigma(p_r^{e_r})$. ここで, $\sigma(p_i^{e_i}) = 1 + p_i^1 + p_i^2 + \cdots + p_i^{e_i}$. [1]
   $\sigma(p_i^{e_i}) = \dfrac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}$ だから, $\sigma(n) = \dfrac{p_1^{e_1+1} - 1}{p_1 - 1}\cdot\dfrac{p_2^{e_2+1} - 1}{p_2 - 1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{p_r^{e_r+1} - 1}{p_r - 1}$.

[1] $\sigma(n) = \sigma(p_1^{e_1})\sigma(p_2^{e_2})\cdots\sigma(p_r^{e_r}) = (1 + p_1^1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{e_1})(1 + p_2^1 + p_2^2 + \cdots + p_2^{e_2})\cdots(1 + p_r^1 + p_r^2 + \cdots + p_r^{e_r})$ を展開したときに得られる各項 $p_1^{h_1}p_2^{h_2}\cdots p_r^{h_r}$ $(0 \le h_i \le e_i, 1 \le i \le r)$ により, n の正の約数が重複なくすべて与えられることに注意せよ.

5. 2^p-1 は素数だから,

$$\begin{aligned}\sigma(2^{p-1}(2^p-1)) &= \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p-1)\\ &= (1+2+2^2+\cdots+2^{p-1})(1+(2^p-1))\\ &= (2^p-1)2^p\\ &= 2\cdot 2^{p-1}(2^p-1)\end{aligned}$$

ゆえに, $2^{p-1}(2^p-1)$ は完全数である.

6. (1)
$$\begin{aligned}7x+5y &= 5(x+y)+2x\\ &= 5z+2x && (z=x+y)\\ &= 2(2z+x)+z\\ &= 2u+z && (u=2z+x)\end{aligned}$$
ゆえに, $2u+z=100$ だから, $z=100-2u$.
したがって, $x=u-2z=u-2(100-2u)=-200+5u$.
$y=z-x=(100-2u)-(-200+5u)=300-7u$.
$u=0$ とおくと, 特殊解は $x=-200$, $y=300$.

(2)
$$\begin{aligned}385x+364y &= 364(x+y)+21x\\ &= 364z+21x && (z=x+y)\\ &= 21(17z+x)+7z\\ &= 21u+7z && (u=17z+x)\\ &= 7(3u+z)\end{aligned}$$
ゆえに, $7(3u+z)=42$ だから, $z=6-3u$.
したがって, $x=u-17z=u-17(6-3u)=-102+52u$.
$y=z-x=(6-3u)-(-102+52u)=108-55u$.
$u=0$ とおくと, 特殊解は $x=-102$, $y=108$.

(3)
$$\begin{aligned}57x-87y &= 57(x-y)-30y\\ &= 57z-30y && (z=x-y)\\ &= -30(-z+y)+27z\\ &= -30u+27z && (u=-z+y)\\ &= 27(-2u+z)+24u\\ &= 27v+24u && (v=-2u+z)\\ &= 24(v+u)+3v\\ &= 24w+3v && (w=v+u)\\ &= 3(8w+v)\end{aligned}$$
ゆえに, $3(8w+v)=342$ だから, $v=114-8w$.
$u=w-v=w-(114-8w)=-114+9w$.
$z=v+2u=(114-8w)+2(-114+9w)=-114+10w$.
したがって, $y=u+z=(-114+9w)+(-114+10w)=-228+19w$.
$x=z+y=(-114+10w)+(-228+19w)=-342+29w$.
$w=0$ とおくと, 特殊解は $x=-342$, $y=-228$.

7. (1)
$$\begin{aligned}x+2y+3z &= (x+y+z)+y+2z\\ &= u+y+2z && (u=x+y+z)\\ &= (u+y+z)+z\\ &= v+z && (v=u+y+z)\end{aligned}$$
ゆえに, $v+z=4$ だから, $z=4-v$.
したがって, $y=v-u-z=v-u-(4-v)=2v-u-4$.
$x=u-y-z=u-(2v-u-4)-(4-v)=-v+2u$.

（別解）
$$\begin{aligned}x+2y+3z &= u\\ y &= v\\ z &= w\end{aligned}$$
ゆえに, $u=4$ だから, $x=4-2y+3z=4-2v+3w$.
$u=v=w=0$ とおくと, 特殊解は $x=4$, $y=0$, $z=0$.

(2)
$$\begin{aligned}18x-24y+13z &= 13(x-2y+z)+5x+2y\\ &= 13u+5x+2y && (u=x-2y+z)\\ &= 2(6u+2x+y)+u+x\\ &= 2v+u+x && (v=6u+2x+y)\end{aligned}$$

ゆえに, $2v+u+x=50$ だから, $x=50-2v-u$.
$y=v-6u-2x=v-6u-2(50-2v-u)=5v-4u-100$.
$z=u-x+2y=u-(50-2v-u)+2(5v-4u-100)=-6u+12v-250$.
$u=v=w=0$ とおくと, 特殊解は $x=50$, $y=-100$, $z=-250$.
（別解）
$$\begin{array}{rcll} 18x-24y+13z &=& 18(x-2y)+12y+13z & \\ &=& 18u+12(y+z)+z & (u=x-2y) \\ &=& 18u+12v+z & (v=y+z) \end{array}$$
ゆえに, $18u+12v+z=50$ だから, $z=50-18u-12v$.
$y=v-z=-50+18u+13v$.
$x=u+2y=-100+37u+26v$.
$u=v=w=0$ とおくと, 特殊解は $x=-100$, $y=-50$, $z=50$.

(3)
$$\begin{array}{rcll} 105x-273y-195z &=& 105(x-3y-2z)+42y+15z & \\ &=& 105u+42y+15z & (u=x-3y-2z) \\ &=& 15(7u+2y+z)+12y & \\ &=& 15v+12y & (v=7u+2y+z) \\ &=& 12(v+y)+3v & \\ &=& 12w+3v & (w=v+y) \\ &=& 3(4w+v) & \end{array}$$
ゆえに, $3(4w+v)=1365$ だから, $v=455-4w$.
したがって, $y=w-v=w-(455-4w)=-455+5w$.
$z=v-7u-2y=(455-4w)-7u-2(-455+5w)=3\cdot 455-14w-7u$.
$x=u+3y+2z=u+3(-455+5w)+2(3\cdot 455-14w-7u)=1365-13w-13u$.
$u=w=0$ とおくと, 特殊解は $x=1365$, $y=-455$, $z=1365$.

8. x,y が一般解であるとする．このとき, $ax+by=c$.
x_0,y_0 は特殊解だから, $ax_0+by_0=c$. ゆえに, $a(x-x_0)=-b(y-y_0)$.
ところで, $\gcd(a,b)=d$ だから, ある整数 a',b' が存在して, $a=a'd, b=b'd$. ゆえに, $a'd(x-x_0)=-b'd(y-y_0)$. したがって, $b'|a'(x-x_0)$.
$\gcd(a',b')=1$ だから, $b'|(x-x_0)$. このとき, ある整数 k が存在して, $x-x_0=kb'$. ゆえに, $x=x_0+\dfrac{b}{d}k$.
また, $a'dkb'=-b'd(y-y_0)$ だから, $y-y_0=-a'k$. ゆえに, $y=y_0-\dfrac{a}{d}k$.

9.
$$\begin{array}{rcll} 2x+3y+5z &=& 2(x+y+2z)+y+z & \\ &=& 2u+y+z & (u=x+y+2z) \end{array}$$
$2u+y+z=1$ だから, $y=1-z-2u$.
$x=u-y-2z=u-(1-z-2u)-2z=-1-z+3u$.
これを $3x+5y+7z=1$ に代入すると, $3(-1-z+3u)+5(1-z-2u)+7z=1$ だから, $1-z-u=0$.
ゆえに, $u=1-z$.
したがって, $x=-1-z+3(1-z)=2-4z$.
$y=1-z-2(1-z)=-1+z$.

（別解）与えられた連立 1 次方程式の係数行列を A，拡大係数行列を $\tilde{A}$ とする．$\tilde{A}$ に基本行変形を施すと,
$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right].$$
A は 3 列で，$r(A)=r(\tilde{A})=2$ だから，$3-2=1$ 個のパラメータで表される無限個の解が存在する．
このとき，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ だから，z をパラメータとして，解は，$\left\{\begin{array}{rcr} x+4z &=& 2 \\ y+z &=& -1 \end{array}\right.$.
すなわち．$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2-4z \\ y &=& -1+z \end{array}\right.$.