離散数学演習 7　解答例

1. (1) $f \subseteq A \times B$, かつ, 任意の $x \in A$ に対して, $y \in B$ が唯一存在して, $(x, y) \in f$.
   (2) $(a, b) \in f$ であるような $b \in B$
   (3) $b = f(a)$ であるような $a \in A$
   (4) $\{f(x) \mid x \in X\}$
   (5) $\{x \mid f(x) \in Y\}$
   (6) $\{x \in A \mid$ ある $y \in B$ に対して, $y = f(x)\}$
   (7) $\{y \in B \mid$ ある $x \in A$ に対して, $y = f(x)\}$
   （別解）$\{f(x) \mid x \in A\}$, $f(A)$
   (8) 任意の $y \in B$ に対して, ある $x \in A$ が存在して, $y = f(x)$.
   (9) 任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して, $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$.
   （別解）任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$.
   (10) f は全射かつ単射である.
   (11) f は有限集合上の全単射である.
   (12) 任意の $x \in A$ に対して, $I_A(x) = x$.
   (13) 任意の $x \in A$ に対して, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
   (14) $g \circ f = I_A$ かつ $f \circ g = I_B$.
   (15) $\{f \mid f : A \to B\}$
   (16) $f : A \to \{0, 1\}$

2. $(2, 3), (2, 1) \in R$ であり, $(2, x) \in R$ となる $x \in A$ は唯一でないから, R は関数ではない.
   $(2, y) \in S$ となる $y \in A$ が存在しないので, S は関数ではない.
   任意の $x \in A$ に対して, $(x, y) \in T$ となる $y \in A$ が唯一存在するので, T は関数である.

3. (1) (a) $f \circ g = \{(a, a), (b, d), (c, b), (d, a)\}$ [1]
   (b) $h \circ f = \{(a, c), (b, a), (c, a), (d, c)\}$
   (c) $g \circ g = \{(a, d), (b, c), (c, b), (d, a)\}$
   (2) $a \in A$ に対して, $(a, c), (a, b) \in f^{-1}$ だから, f^{-1} は関数ではない.
   $g^{-1} = \{(b, a), (d, b), (a, c), (c, d)\}$ であり, 任意の $x \in A$ に対して, $(x, y) \in g^{-1}$ となる $y \in A$ は唯一である．ゆえに, g^{-1} は関数である.
   $x \in A$ に対して, $(c, b), (c, d) \in h^{-1}$ だから, h^{-1} は関数ではない.
   (3) $b, c \in A$ に対して, $f(b) = f(c)$ だから, f は単射ではない.
   $A = \{a, b, c, d\}$ であって, $g(a), g(b), g(c), g(d)$ は互いに異なるから, g は単射である.
   $a, c \in A$ に対して, $h(a) = h(c)$ だから, h は単射ではない.
   $(x, c) \in f$ となる $x \in A$ は存在しないから, f は全射ではない.
   任意の $y \in A$ に対して, $(x, y) \in g$ となる $x \in A$ が存在するから, g は全射である.
   $(x, b) \in h$ となる $x \in A$ は存在しないから, h は全射ではない.

4. $B^A = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$. ただし,
   $f_1 = \{(a, 1), (b, 1)\}$, $f_4 = \{(a, 2), (b, 1)\}$, $f_7 = \{(a, 3), (b, 1)\}$,
   $f_2 = \{(a, 1), (b, 2)\}$, $f_5 = \{(a, 2), (b, 2)\}$, $f_8 = \{(a, 3), (b, 2)\}$,
   $f_3 = \{(a, 1), (b, 3)\}$, $f_6 = \{(a, 2), (b, 3)\}$, $f_9 = \{(a, 3), (b, 3)\}$.

5. 任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ とする．このとき, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. $g(f(x_1)) = (g \circ f)(x_1) = I_A(x_1) = x_1$, $g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = I_A(x_2) = x_2$ だから, $x_1 = x_2$. ゆえに, f は単射である.
   一方, 任意の $x \in A$ に対して, $g(f(x)) = (g \circ f)(y) = I_A(y) = y$. $f(x) = y$ とおくと, $y \in B$ であり, $g(y) = x$. ゆえに, g は全射である.

[1] $f \circ g = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & a \end{bmatrix}$ などと書いてもよい.

6. (1) g は全射だから, 任意の $z \in C$ に対して, ある $y \in B$ が存在して, $g(y) = z$. また, f は全射だから, $y \in B$ に対して, ある $x \in A$ が存在して, $f(x) = y$. すなわち, 任意の $z \in C$ に対して, ある $x \in A$ が存在して, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$ だから, $g \circ f$ は全射である.

(2) 任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ とする. このとき, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. g は単射だから, $f(x_1) = f(x_2)$. さらに, f は単射だから, $x_1 = x_2$. ゆえに, $g \circ f$ は単射である.

(3) $g \circ f : A \to C$ は全射だから, 任意の $z \in C$ に対して, ある $x \in A$ が存在して, $(g \circ f)(x) = z$. このとき, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ だから, $f(x) = y\ (\in B)$ とおくと, 任意の $z \in C$ に対して, ある $y \in B$ が存在して, $g(y) = z$. すなわち, g は全射である.

(4) 任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ とする. このとき, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. ゆえに, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. これは $g \circ f$ は単射だから, $x_1 = x_2$. したがって, f は単射である.

7. (1) 任意の $y \in f(A)$ に対して, ある $x_1, x_2 \in A (x_1 \neq x_2)$ が存在して, $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$ と仮定する. このとき, $y = f(x_1) = f(x_2)$. f は単射だから, $x_1 = x_2$. これは矛盾. すなわち, 任意の $y \in f(A)$ に対して, $(y, x) \in f^{-1}$ となる $x \in A$ は唯一存在する. したがって, f^{-1} は $f(A)$ から A への関数である.
一方, 任意の $y_1, y_2 \in f(A)$ に対して, $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ とする. $y_1 \in f(A)$ だから, ある $x_1 \in A$ が存在して, $f(x_1) = y_1$. すなわち, $f^{-1}(y_1) = x_1$. また, $y_2 \in f(A)$ だから, ある $x_2 \in A$ が存在して, $f(x_2) = y_2$. すなわち, $f^{-1}(y_2) = x_2$. ゆえに, $x_1 = x_2$. このとき, $f(x_1) = f(x_2)$ だから $y_1 = y_2$. ゆえに, f^{-1} は単射である.

(2) f は全射だから, $f(A) = B$. (1) により, f^{-1} は B から A への単射である.
一方, f は A から B への関数だから, 任意の $x \in A$ に対して, ある $y \in B$ が存在して, $y = f(x)$. すなわち, $f^{-1}(y) = x$. したがって, f^{-1} は全射である.

8. (1) 任意の $x \in X$ に対して, $f(x) \in f(X)$ だから, $x \in f^{-1}(f(X))$. ゆえに, $X_1 \subseteq f^{-1}(f(X))$.
$y \in f(f^{-1}(Y))$ とする. このとき, $x \in f^{-1}(Y)$ が存在して, $y = f(x)$. $x \in f^{-1}(Y)$ だから, $f(x) \in Y_1$. すなわち, $y \in Y$. ゆえに, $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

(2) 任意の $y \in f(X_1)$ に対して, $x \in X_1$ が存在して, $y = f(x)$. $X_1 \subseteq X_2$ だから, $x \in X_2$. ゆえに, $f(x) \in f(X_2)$ であり, $y \in f(X_2)$. すなわち, $f(X_1) \subseteq f(X_2)$.
任意の $x \in f^{-1}(Y_1)$ に対して, $f(x) \in Y_1 \subseteq Y_2$. ゆえに, $x \in f^{-1}(Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$.

(3) 任意の $y \in f(X_1 \cup X_2)$ に対して, $x \in X_1 \cup X_2$ が存在して, $y = f(x)$. $x \in X_1 \cup X_2$ だから, $x \in X_1$ または $x \in X_2$. ゆえに, $f(x) \in f(X_1)$ または $f(x) \in f(X_2)$ だから, $y = f(x) \in f(X_1) \cup f(X_2)$. すなわち, $f(X_1 \cup X_2) \subseteq f(X_1) \cup f(X_2)$.
一方, 任意の $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$ に対して, $y \in f(X_1)$ または $y \in f(X_2)$. $y \in f(X_1)$ のとき, $x_1 \in X_1$ が存在して, $y = f(x_1)$. $X_1 \subseteq X_1 \cup X_2$ だから, $x_1 \in X_1 \cup X_2$. ゆえに, $y = f(x_1) \in f(X_1 \cup X_2)$. $y \in f(X_2)$ のとき, $x_2 \in X_2$ が存在して, $y = f(x_2)$. $X_2 \subseteq X_1 \cup X_2$ だから, $x_2 \in X_1 \cup X_2$. ゆえに, $y = f(x_2) \in f(X_1 \cup X_2)$. いずれの場合も, $x \in X_1 \cup X_2$ が存在して, $y = f(x) \in f(X_1 \cup X_2)$. すなわち, $f(X_1) \cup f(X_2) \subseteq f(X_1 \cup X_2)$.
以上から, $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
任意の $x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$ に対して, $f(x) \in Y_1 \cup Y_2$ だから, $f(x) \in Y_1$ または $f(x) \in Y_2$. ゆえに, $x \in f^{-1}(Y_1)$ または $x \in f^{-1}(Y_2)$ だから, $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
一方, 任意の $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$ に対して, $x \in f^{-1}(Y_1)$ または $x \in f^{-1}(Y_2)$. ゆえに, $f(x) \in Y_1$ または $f(x) \in Y_2$ だから, $f(x) \in Y_1 \cup Y_2$ であり, $x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$.
以上から, $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

(4) 任意の $y \in f(X_1 \cap X_2)$ に対して, $x \in X_1 \cap X_2$ が存在して, $y = f(x)$. $x \in X_1 \cap X_2$ だから, $x \in X_1$ かつ $x \in X_2$. ゆえに, $f(x) \in f(X_1)$ かつ $f(x) \in f(X_2)$ だから, $y = f(x) \in f(X_1) \cap f(X_2)$. すなわち, $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$.
任意の $x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$ に対して, $f(x) \in Y_1 \cap Y_2$ だから, $f(x) \in Y_1$ かつ $f(x) \in Y_2$. ゆえに, $x \in f^{-1}(Y_1)$ かつ $x \in f^{-1}(Y_2)$ だから, $x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.
一方, 任意の $x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$ に対して, $x \in f^{-1}(Y_1)$ かつ $x \in f^{-1}(Y_2)$. ゆえに, $f(x) \in Y_1$ かつ $f(x) \in Y_2$ だから, $f(x) \in Y_1 \cap Y_2$ であり, $x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$.
以上から, $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

(5) 任意の $y \in f(X_1) - f(X_2)$ に対して, $y \in f(X_1)$ かつ $y \notin f(X_2)$. $y \in f(X_1)$ だから, $x_1 \in X_1$ が存在して, $y = f(x_1)$. また, $y \notin f(X_2)$ だから, 任意の $x_2 \in X_2$ に対して, $y = f(x_2)$ とならない. ゆえに, $x_1 \in X_1 - X_2$ だから, $y = f(x_1) \in f(X_1 - X_2)$. すなわち, $f(X_1) - f(X_2) \subseteq f(X_1 - X_2)$.
任意の $x \in f^{-1}(Y_1 - Y_2)$ に対して, $f(x) \in Y_1 - Y_2$ だから, $f(x) \in Y_1$ かつ $f(x) \notin Y_2$. ゆえに, $x \in f^{-1}(Y_1)$ かつ $x \notin f^{-1}(Y_2)$ だから, $x \in f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1 - Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$.
一方, 任意の $x \in f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$ に対して, $x \in f^{-1}(Y_1)$ かつ $x \notin f^{-1}(Y_2)$. ゆえに, $f(x) \in Y_1$ かつ $f(x) \notin Y_2$ だから, $f(x) \in Y_1 - Y_2$ であり, $x \in f^{-1}(Y_1 - Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 - Y_2)$.
以上から, $f^{-1}(Y_1 - Y_2) = f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$.