離散数学演習 6　解答例

1. (1) A の任意の部分集合 B に対して, B の上限と下限が存在する.

   (2) L の任意の有限部分集合 B に対して, B の上限と下限が存在する.

   (3) $\{a, b\}$ の上限

   (4) $\{a, b\}$ の下限

2. (1)

$+$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	3
4	1	1	1	4	4	4	4
5	1	2	1	4	5	4	5
6	1	1	3	4	4	6	6
7	1	2	3	4	5	6	7

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	2	7	5	5	7	7
3	3	7	3	6	7	6	7
4	4	5	6	4	5	6	7
5	5	5	7	5	5	7	7
6	6	7	6	6	7	6	7
7	7	7	7	7	7	7	7

上表から, 任意の 2 つの要素に対して上限と下限が存在するので, 与えられた半順序集合は束である.

   (2)

$+$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
5	1	2	3	2	5	5
6	1	2	3	4	5	6

$\cdot$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	5	4	5	6
3	3	5	3	6	5	6
4	4	4	6	4	6	6
5	5	5	5	6	5	6
6	6	6	6	6	6	6

上表から, 任意の 2 つの要素に対して上限と下限が存在するので, 与えられた半順序集合は束である.

3. (1) $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ だから，$X \cup Y \in \mathcal{P}(A)$．また，$X \subseteq X \cup Y$，$Y \subseteq X \cup Y$ だから，$X \cup Y$ は $\{X, Y\}$ の上界である．
$\{X, Y\}$ の任意の上界を Z とすると，$X \subseteq Z$，$Y \subseteq Z$．このとき，$X \cup Y \subseteq Z$．すなわち，$X \cup Y$ は $\{X, Y\}$ の最小上界，すなわち上限である．
一方，$X, Y \in \mathcal{P}(A)$ だから，$X \cap Y \in \mathcal{P}(A)$．また，$X \cap Y \subseteq X$，$X \cap Y \subseteq Y$ だから，$X \cap Y$ は $\{X, Y\}$ の下界である．
$\{X, Y\}$ の任意の下界を Z とすると，$Z \subseteq X$，$Z \subseteq Y$．このとき，$Z \subseteq X \cap Y$．すなわち，$X \cap Y$ は $\{X, Y\}$ の最大下界，すなわち下限である．

   (2) (1) から，任意の $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ に対して，$\sup\{X, Y\}$ と $\inf\{X, Y\}$ が存在するので，$(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ は束である．

4. (1) $b + c$ は $\{a, c\}$ の上界であることを示す.
明らかに, $b \leq b + c$. $a \leq b$ で, $\leq$ は推移的であるから, $a \leq b + c$.
一方, 明らかに, $c \leq b + c$.
ゆえに, $b + c$ は $\{a, c\}$ の上界である.
ところが, $a + c$ は $\{a, c\}$ の上限であるから, $a + c \leq b + c$.
同様に, $a \cdot c \leq b \cdot c$ を示すことができる.

   (2) $b + d$ は $\{a, c\}$ の上界であることを示す.
明らかに, $b \leq b + d$, $d \leq b + d$. $a \leq b$ で, $\leq$ は推移的であるから, $a \leq b + d$. また, $c \leq d$ で, $\leq$ は推移的であるから, $c \leq b + d$. ゆえに, $b + d$ は $\{a, c\}$ の上界である.
ところが, $a + c$ は $\{a, c\}$ の上限だから, $a + c \leq b + d$.
同様に, $a \cdot c \leq b \cdot d$ を示すことができる.

   (3) $(a \cdot b) + c$ は $\{a, b + c\}$ の下界であることを示す.
明らかに, $a \cdot b \leq a$. また, $c \leq a$ だから, a は $\{a \cdot b, c\}$ の上界であり, $(a \cdot b) + c \leq a$.
一方, 明らかに, $c \leq b + c$. また, $a \cdot b \leq b \leq b + c$. ゆえに, $b + c$ は $\{a \cdot b, c\}$ の上界であり, $(a \cdot b) + c \leq b + c$.
以上から, $(a \cdot b) + c$ は $\{a, b + c\}$ の下界である.
ところが, $a \cdot (b + c)$ は $\{a, b + c\}$ の下限であるから, $(a \cdot b) + c \leq a \cdot (b + c)$.

(4) $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ は $\{a, b+c\}$ の下界であることを示す.
明らかに, $a \cdot b \leq a, a \cdot c \leq a$. ゆえに, a は $\{a \cdot b, a \cdot c\}$ の上界であり, $(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq a$.
一方, $a \cdot b \leq b \leq b + c$, $a \cdot c \leq c \leq b + c$. ゆえに, $b + c$ は $\{a \cdot b, a \cdot c\}$ の上界であり, $(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq b + c$.
以上から, $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ は $\{a, b+c\}$ の下界である.
ところが, $a \cdot (b + c)$ は $\{a, b+c\}$ の下限であるから, $(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq a \cdot (b + c)$.

(5) $a + (b \cdot c)$ は $\{a + b, a + c\}$ の下界であることを示す.
明らかに, $a \leq a + b$. また, $b \cdot c \leq b \leq a + b$. ゆえに, $a + b$ は $\{a, b \cdot c\}$ の上界であり, $a + (b \cdot c) \leq a + b$.
一方, 明らかに, $a \leq a + c$. また, $b \cdot c \leq c \leq a + c$. ゆえに, $a + c$ は $\{a, b \cdot c\}$ の上界であり, $a + (b \cdot c) \leq a + c$.
以上から, $a + (b \cdot c)$ は $\{a + b, a + c\}$ の下界である.
ところが, $(a + b) \cdot (a + c)$ は $\{a + b, a + c\}$ の下限であるから, $a + (b \cdot c) \leq (a + b) \cdot (a + c)$.

5. (1) $a + (b + c) = u$ とおく.
まず, u が $\{a + b, c\}$ の上界であることを示す.
u は $\{a, b + c\}$ の上限だから, $a \leq u, b + c \leq u$. $b + c \leq u$ だから, $b \leq u, c \leq u$. ゆえに, u は $\{a, b\}$ の上界であり, $a + b \leq u$. したがって, u は $\{a + b, c\}$ の上界でもある.
次に, u が $\{a + b, c\}$ の上限であることを示す.
そこで, u' を $\{a + b, c\}$ の任意の上界とする. このとき, $a \leq u', b \leq u', c \leq u'$. ゆえに, u' は $\{b, c\}$ の上界であり, $b + c \leq u'$. したがって, u' は $\{a, b + c\}$ の上界でもある. ところが, u は $\{a, b + c\}$ の上限だから, $u \leq u'$. ゆえに, u は $\{a + b, c\}$ の最小上界, すなわち, 上限であり, $u = (a + b) + c$. 結局, $a + (b + c) = (a + b) + c$.
同様に, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ も示すことができる.

(2) 明らかに, $a \cdot b \leq a$. このとき, $(a \cdot b) + a = a$. ゆえに, $a + (a \cdot b) = a$.
また, 明らかに, $a \leq a + b$. このとき, $a \cdot (a + b) = a$.

(3) $+, \cdot$ の定義から明らか.

6. (2) が成り立つとする. このとき,

$$
\begin{aligned}
a + a &= a + (a \cdot (a + b)) && \text{(吸収則)} \\
&= a && \text{(吸収則)} \\
a \cdot a &= a \cdot (a + (a \cdot b)) && \text{(吸収則)} \\
&= a && \text{(吸収則)}
\end{aligned}
$$

となるから, (3) が成り立つ.

7. (1) が成り立つとする. このとき,

$$
\begin{aligned}
(a + b) \cdot (a + c) &= ((a + b) \cdot a) + ((a + b) \cdot c) && \text{((1))} \\
&= (a \cdot (a + b)) + ((a + b) \cdot c) && \text{(交換則)} \\
&= a + ((a + b) \cdot c) && \text{(吸収則)} \\
&= a + (c \cdot (a + b)) && \text{(交換則)} \\
&= a + ((c \cdot a) + (c \cdot b)) && \text{((1))} \\
&= a + ((a \cdot c) + (b \cdot c)) && \text{(交換則)} \\
&= (a + (a \cdot c)) + (b \cdot c) && \text{(結合則)} \\
&= a + (b \cdot c) && \text{(吸収則)}
\end{aligned}
$$

となるから, (2) が成り立つ.
同様に, (2) が成り立つならば, (1) が成り立つことを示せる.
ゆえに, (1) と (2) は互いに同値である.