離散数学演習 5　解答例

1. (1) R は反射的，反対称的，かつ推移的である．

   (2) $(x, y) \in R$ または $(y, x) \in R$.

   (3) R は A 上の半順序であり, かつ, 任意の $x, y \in A$ に対して, x と y は比較可能である.

   (4) $a \leq x$ かつ $a \neq x$ となる $x \in B$ は存在しない.

   (5) $x \leq a$ かつ $a \neq x$ となる $x \in B$ は存在しない.

   (6) 任意の $x \in B$ に対して, $x \leq a$.

   (7) 任意の $x \in B$ に対して, $a \leq x$.

   (8) 任意の $x \in B$ に対して, $x \leq a$.

   (9) a は B の上界であり, かつ, B の任意の上界 x に対して, $a \leq x$.

   (10) 任意の $x \in B$ に対して, $a \leq x$.

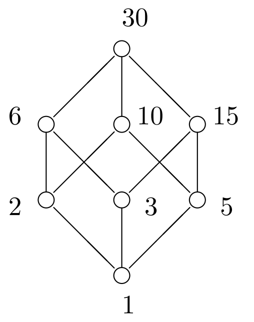
   (11) a は B の下界であり, かつ, B の任意の下界 x に対して, $x \leq a$.

2. (1) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5),(1,6),(1,10),(1,15),(1,30),\ (2,2),(2,6),(2,10),(2,30),$
   $(3,3),(3,6),(3,15),(3,30),\ (5,5),(5,10),(5,15),(5,30),(6,6),(6,30),\ (10,10),(10,30),$
   $(15,15),(15,30),(30,30)\}$

   (2) $(1,1),(2,2),(3,3),(5,5),(6,6),(10,10),(15,15),\ (30,30) \in R$ だから, R は反射的である.
   $(1,2) \in R$ に対して, $(2,1) \notin R$.
   $(1,3) \in R$ に対して, $(3,1) \notin R$.
   $(1,5) \in R$ に対して, $(5,1) \notin R$.
   $(1,6) \in R$ に対して, $(6,1) \notin R$.
   $(1,10) \in R$ に対して, $(10,1) \notin R$.
   $(1,15) \in R$ に対して, $(15,1) \notin R$.
   $(1,30) \in R$ に対して, $(30,1) \notin R$.
   $(2,6) \in R$ に対して, $(6,2) \notin R$.
   $(2,10) \in R$ に対して, $(10,2) \notin R$.
   $(2,30) \in R$ に対して, $(30,2) \notin R$.
   $(3,6) \in R$ に対して, $(6,3) \notin R$.
   $(3,15) \in R$ に対して, $(15,3) \notin R$.
   $(3,30) \in R$ に対して, $(30,3) \notin R$.
   $(5,10) \in R$ に対して, $(10,5) \notin R$.
   $(5,15) \in R$ に対して, $(15,5) \notin R$.
   $(5,30) \in R$ に対して, $(30,5) \notin R$.
   $(6,30) \in R$ に対して, $(30,6) \notin R$.
   $(10,30) \in R$ に対して, $(30,10) \notin R$.
   $(15,30) \in R$ に対して, $(30,15) \notin R$.
   以上から, R は反対称的である.
   $(1,1),(1,1) \in R$ に対して, $(1,1) \in R$.
   $(1,1),(1,2) \in R$ に対して, $(1,2) \in R$.
   $(1,1),(1,3) \in R$ に対して, $(1,3) \in R$.
   $(1,1),(1,5) \in R$ に対して, $(1,5) \in R$.
   $(1,1),(1,6) \in R$ に対して, $(1,6) \in R$.
   $(1,1),(1,10) \in R$ に対して, $(1,10) \in R$.
   $(1,2),(2,2) \in R$ に対して, $(1,2) \in R$.
   $(1,2),(2,6) \in R$ に対して, $(1,6) \in R$.
   $(1,2),(2,10) \in R$ に対して, $(1,10) \in R$.
   $(1,2),(2,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
   $(1,3),(3,3) \in R$ に対して, $(1,3) \in R$.
   $(1,3),(3,6) \in R$ に対して, $(1,6) \in R$.
   $(1,3),(3,15) \in R$ に対して, $(1,15) \in R$.
   $(1,3),(3,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
   $(1,5),(5,5) \in R$ に対して, $(1,5) \in R$.
   $(1,5),(5,10) \in R$ に対して, $(1,10) \in R$.

$(1,5),(5,15) \in R$ に対して, $(1,15) \in R$.
$(1,5),(5,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
$(1,6),(6,6) \in R$ に対して, $(1,6) \in R$.
$(1,6),(6,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
$(1,10),(10,10) \in R$ に対して, $(1,10) \in R$.
$(1,10),(10,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
$(1,15),(15,15) \in R$ に対して, $(1,15) \in R$.
$(1,15),(15,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
$(1,30),(30,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
$(2,2),(2,2) \in R$ に対して, $(2,2) \in R$.
$(2,2),(2,6) \in R$ に対して, $(2,6) \in R$.
$(2,2),(2,10) \in R$ に対して, $(2,10) \in R$.
$(2,2),(2,30) \in R$ に対して, $(2,30) \in R$.
$(2,6),(6,6) \in R$ に対して, $(2,6) \in R$.
$(2,6),(6,30) \in R$ に対して, $(2,30) \in R$.
$(2,10),(10,10) \in R$ に対して, $(2,10) \in R$.
$(2,10),(10,30) \in R$ に対して, $(2,30) \in R$.
$(2,30),(30,30) \in R$ に対して, $(2,30) \in R$.
$(3,3),(3,3) \in R$ に対して, $(3,3) \in R$.
$(3,3),(3,6) \in R$ に対して, $(3,6) \in R$.
$(3,3),(3,15) \in R$ に対して, $(3,15) \in R$.
$(3,3),(3,30) \in R$ に対して, $(3,30) \in R$.
$(3,6),(6,6) \in R$ に対して, $(3,6) \in R$.
$(3,6),(6,30) \in R$ に対して, $(3,30) \in R$.
$(3,10),(10,10) \in R$ に対して, $(3,10) \in R$.
$(3,10),(10,30) \in R$ に対して, $(3,30) \in R$.
$(3,15),(15,15) \in R$ に対して, $(3,15) \in R$.
$(3,15),(15,30) \in R$ に対して, $(3,30) \in R$.
$(3,30),(30,30) \in R$ に対して, $(3,30) \in R$.
$(5,5),(5,5) \in R$ に対して, $(5,5) \in R$.
$(5,5),(5,10) \in R$ に対して, $(5,10) \in R$.
$(5,5),(5,15) \in R$ に対して, $(5,15) \in R$.
$(5,5),(5,30) \in R$ に対して, $(5,30) \in R$.
$(5,10),(10,10) \in R$ に対して, $(5,10) \in R$.
$(5,10),(10,30) \in R$ に対して, $(5,30) \in R$.
$(5,15),(15,15) \in R$ に対して, $(5,15) \in R$.
$(5,15),(15,30) \in R$ に対して, $(5,30) \in R$.
$(5,30),(30,30) \in R$ に対して, $(5,30) \in R$.
$(6,6),(6,6) \in R$ に対して, $(6,6) \in R$.
$(6,6),(6,30) \in R$ に対して, $(6,30) \in R$.
$(6,30),(30,30) \in R$ に対して, $(6,30) \in R$.
$(10,10),(10,10) \in R$ に対して, $(10,10) \in R$.
$(10,30),(30,30) \in R$ に対して, $(10,30) \in R$.
$(15,15),(15,15) \in R$ に対して, $(15,15) \in R$.
$(15,15),(15,30) \in R$ に対して, $(15,30) \in R$.
$(15,30),(30,30) \in R$ に対して, $(15,30) \in R$.
$(30,30),(30,30) \in R$ に対して, $(30,30) \in R$.
以上から, R は推移的である.

(3)



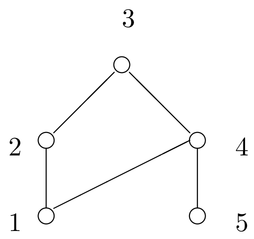
(4) $30Rx, x \neq 30$ となる $x \in A$ は存在しないから, A の極大元は 30 である.
$xR1, x \neq 1$ となる $x \in A$ は存在しないから, A の極小元は 1 である.
$1R30, 2R30, 3R30, 5R30, 6R30, 10R30, 15R30, 30R30$ だから, A の最大元は 30 である.
$1R1, 1R2, 1R3, 1R5, 1R6, 1R10, 1R15, 1R30$ だから, A の最小元は 1 である.

(5) $(2,3) \notin R$, $(3,2) \notin R$ だから, 2 と 3 は比較可能ではない. ゆえに, R は全順序ではない.

3. (1) $R = \{(3,3),(3,2),(3,1),(3,4),(3,5), (2,2),(2,1),(1,1),(4,4),(4,1), (4,5),(5,5)\}$

(2) $1 \leq x, x \neq 1$ となる $x \in A$ は存在しない.
$5 \leq x, x \neq 5$ となる $x \in A$ は存在しない.
ゆえに, A の極大元は 1, 5 である.
$x \leq 3, x \neq 3$ となる $x \in A$ は存在しない.
ゆえに, A の極小元は 3 である.

(3)



4. （図略）
$\mathcal{P}(A)$=$\{\phi$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,b,c,d\}$ $\}$

5. 任意の $x \in Z$ に対して, $x = x^1$ だから, $(x,x) \in R$. すなわち, R は反射的である.
任意の $x, y \in Z$ に対して, $(x,y),(y,x) \in R$ とすると, 正の整数 r_1, r_2 が存在して, $y = x^{r_1}$, $x = y^{r_2}$. このとき, $x = (x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2}$ だから, $r_1 r_2 = 1$. $r_1 r_2$ は正の整数だから, $r_1 = r_2 = 1$. ゆえに, $x = y$ だから, R は反対称的である.
任意の $x, y, z \in Z$ に対して, $(x,y),(y,z) \in R$ とすると, 正の整数 r_1, r_2 が存在して, $y = x^{r_1}$, $z = y^{r_2}$. このとき, $z = x^{r_1 r_2}$. $r_1 r_2$ は正の整数だから, $(x,z) \in R$. すなわち, R は推移的である.
以上から, R は半順序である.
（反対称性に関する別証明）任意の $x, y \in Z (x \neq y)$ に対して, $(x,y) \in R$ とすると, 正の整数 r が存在して, $y = x^r$ $(r \neq 1)$. このとき, $x = y^{\frac{1}{r}}$. $\dfrac{1}{r}$ は正の整数でないので, $(y,x) \notin R$. すなわち, R は反対称的である.

6. B の最大元は唯一でないと仮定する. そこで, 最大元が 2 つあるとして, それらを $b_1, b_2 \in B$ とする. このとき, b_1 は最大元だから, $(b_2, b_1) \in R$. また, b_2 は最大元だから, $(b_1, b_2) \in R$. R は反対称的だから, $b_1 = b_2$. すなわち, B の最大元は唯一である.
最小元の唯一性も同様に示せる.

7. $a \neq b$ とする.
   $\leq$ は全順序だから, $a \leq b$ または $b \leq a$.
   $a \leq b$ のとき, b が極小元であることに矛盾する. $b \leq a$ のとき, a が極小元であることに矛盾する.
   ゆえに, $a = b$.

8. $2R1, 3R1, 4R1$.
   $2R2, 3R2, 4R2$.
   ゆえに, B の上界は 1, 2 である.
   $5R2, 5R3, 5R4$.
   $6R2, 6R3, 6R4$.
   ゆえに, B の下界は 5, 6 である.
   B の上界 1, 2 に対して, $2R1, 2R2$ だから, B の上限は 2 である.
   B の下界 5, 6 に対して, $5Rx, 6Rx$ となる $x \in \{5, 6\}$ は存在しないので, B の下限は存在しない.

9. B: $3R1, 5R1$.
   $3R2, 5R2$.
   $3R3, 5R3$.
   ゆえに, B の上界は 1,2,3 である.
   $5R3, 5R5$.
   $6R3, 6R5$.
   $7R3, 7R5$.
   $8R3, 7R5$.
   ゆえに, B の下界は 5,6,7,8 である.
   B の上界 1,2,3 に対して, $3R1, 3R2, 3R3$ だから, B の上限は 3 である.
   B の下界 5,6,7,8 に対して, $5R5, 6R5, 6R5, 8R5$ だから, B の下限は 5 である.

   C: $6R1, 8R1$.
   $6R2, 8R2$.
   $6R3, 8R3$.
   $6R4, 8R4$.
   $6R5, 8R5$.
   $6R6, 8R6$.
   ゆえに, C の上界は 1,2,3,4,5,6 である.
   $6R8, 8R8$.
   ゆえに, C の下界は 8 である.
   C の上界 1,2,3,4,5,6 に対して, $6R1, 6R2, 6R3, 6R4, 6R5, 6R6$ だから, C の上限は 6 である.
   C の下界 8 に対して, $8R8$ だから, C の下限は 8 である.

   D: $2R2, 3R2, 6R2$
   ゆえに, D の上界は 2 である.
   $6R2, 6R3, 6R6$.
   $8R2, 8R3, 8R6$.
   ゆえに, D の下界は 6,8 である.
   D の上界 2 に対して, $2R2$ だから, D の上限は 2 である.
   D の下界 6,8 に対して, $6R6, 8R6$ だから, D の下限は 6 である.

   E: $4R1, 5R1, 6R1$.
   $4R2, 5R2, 6R2$.
   $4R3, 5R3, 6R3$.
   ゆえに, E の上界は 1,2,3 である.
   $6R4, 6R5, 6R6$.
   $8R4, 8R5, 8R6$.
   ゆえに, E の下界は 6,8 である.
   E の上界 1,2,3 に対して, $3R1, 3R2, 3R3$ だから, E の上限は 3 である.
   E の下界 6,8 に対して, $6R6, 8R6$ だから, E の下限は 6 である.

   F: $4R1, 5R1, 7R1$.
   $4R2, 5R2, 7R2$.
   $4R3, 5R3, 7R3$.
   ゆえに, F の上界は 1,2,3 である.
   $8R4, 8R5, 8R7$

ゆえに, F の下界は 8 である.
F の上界 1,2,3 に対して, $3R1, 3R2, 3R3$ だから, F の上限は 3 である.
F の下界 8 に対して, $8R8$ だから, F の下限は 8 である.

G: $1Rx, 2Rx, 4Rx, 7Rx$ となる $x \in A$ は存在しないから, G の上界は存在しない.
$8R1, 8R2, 8R4, 8R7$.
ゆえに, G の下界は 8 である.
G の上界は存在しないから, G の上限も存在しない.
G の下界 8 に対して, $8R8$ だから, G の下限は 8 である.

10. 任意の $(a,b) \in M^2$ に対して, a で割り切れる $c \in M$ $(a \neq c)$ と b 以上である $d \in M$ $(b \neq d)$ は必ず存在する. ゆえに, $(a,b) \leq (c,d), (a,b) \neq (c,d)$ となる $(c,d) \in M^2$ は必ず存在する. ゆえに, M^2 の極大元は存在しない.
また, $(a,b) \in M^2$ に対して, $(a,b) \leq (p,2)$ (ただし, p は素数) であるとき, $a = p$ かつ $b = 2$. ゆえに, $(a,b) \leq (p,2), (a,b) \neq (p,2)$ となる $(a,b) \in M^2$ は存在しない. ゆえに, $(p,2)$ は M^2 の極小元である.

11. (1) R は反射的だから, 任意の $x \in A$ に対して, xRx. このとき, $x \equiv x$ だから, $\equiv$ は反射的である.
任意の $x, y \in A$ に対して, $x \equiv y$ とする. このとき, xRy かつ yRx だから, yRx かつ xRy. ゆえに, $y \equiv x$. したがって, $\equiv$ は対称的である.
任意の $x, y, z \in A$ に対して, $x \equiv y$, $y \equiv z$ とする. このとき, xRy かつ yRx, yRz かつ zRy. R は推移的だから, xRz かつ zRx. ゆえに, $x \equiv z$. したがって, $\equiv$ は推移的である.
以上から, $\equiv$ は同値関係である.

(2) 任意の $[x]_\equiv \in A/\equiv$ に対して, $x \in A$. R は反射的だから, xRx. ゆえに, $[x]_\equiv \leq [x]_\equiv$ だから, $\leq$ は反射的である.
任意の $[x]_\equiv, [y]_\equiv \in A/\equiv$ に対して, $[x]_\equiv \leq [y]_\equiv$ かつ $[y]_\equiv \leq [x]_\equiv$ とする. このとき, xRy かつ yRx だから, $x \equiv y$. ゆえに, $[x]_\equiv = [y]_\equiv$ だから, $\leq$ は反対称的である.
任意の $[x]_\equiv, [y]_\equiv, [z]_\equiv \in A/\equiv$ に対して, $[x]_\equiv \leq [y]_\equiv$ かつ $[y]_\equiv \leq [z]_\equiv$ とする. このとき, xRy かつ yRz. R は推移的だから, xRz. ゆえに, $[x]_\equiv \leq [z]_\equiv$ だから, $\leq$ は推移的である.
以上から, $\leq$ は半順序である.

12. (1) S が $\mathcal{A}$ の上界であることと, (2) $\mathcal{A}$ の任意の上界 B に対して, $S \subseteq B$ であること（最小上界であること）を示せばよい.
(1) 任意の $X \in \mathcal{A}$ に対して, 明らかに $X \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X = S$. ゆえに, S は $\mathcal{A}$ の上界である.
(2) 任意の $x \in A$ に対して, $x \in S = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$ とする. このとき, ある $X \in \mathcal{A}$ が存在して, $x \in X$. ここで, B を $\mathcal{A}$ の任意の上界とすると, $X \subseteq B$. ゆえに, $x \in B$. すなわち, $S \subseteq B$.