# 離散数学演習 4　解答例

1. (1) $R$ は反射的, 対称的, かつ推移的である.

   (2) ある整数 $d$ に対して, $m - n = d \cdot p$.
   （別解）$m$ と $n$ は $p$ で割ったときの余りが等しい.
   （別解）$m - n$ は $p$ の倍数である.

   (3) $\{x \in A \mid (a, x) \in R\}$

   (4) $\{\ [x]_R \mid x \in A\}$

   (5) 次の i)〜iii) を満たす集合のクラス $\pi = \{A_1, \cdots, A_n\}$

      i) 任意の $A_i \in \pi$ に対して, $A_i \neq \phi$.

      ii) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

      iii) 任意の $A_i, A_j \in \pi$ に対して, $A_i \neq A_j$ ならば $A_i \cap A_j = \phi$.

   (6) $\{(x, y) \mid$ ある $A_i \in \pi$に対して, $x, y \in A_i\}$

   (7) $\pi_1, \pi_2$ がそれぞれ定める $A$ 上の同値関係 $R_{\pi_1}, R_{\pi_2}$ に対して, $R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_2}$.

2. $(1,1), (2,2), (3,3) \in R$ だから, $R$ は反射的である.
$(1,1) \in R$ に対して, $(1,1) \in R$.
$(1,2) \in R$ に対して, $(2,1) \in R$.
$(2,1) \in R$ に対して, $(1,2) \in R$.
$(2,2) \in R$ に対して, $(2,2) \in R$.
$(3,3) \in R$ に対して, $(3,3) \in R$.
以上から, $R$ は対称的である.
$(1,1), (1,1) \in R$ に対して, $(1,1) \in R$.
$(1,1), (1,2) \in R$ に対して, $(1,2) \in R$.
$(1,2), (2,1) \in R$ に対して, $(1,1) \in R$.
$(1,2), (2,2) \in R$ に対して, $(1,2) \in R$.
$(2,1), (1,1) \in R$ に対して, $(2,1) \in R$.
$(2,1), (1,2) \in R$ に対して, $(2,2) \in R$.
$(2,2), (2,2) \in R$ に対して, $(2,2) \in R$.
$(2,2), (2,1) \in R$ に対して, $(2,1) \in R$.
$(3,3), (3,3) \in R$ に対して, $(3,3) \in R$.
以上から, $R$ は推移的である.
したがって, $R$ は同値関係である.

   $[1]_R = \{1, 2\}$
   $[2]_R = \{1, 2\}$
   $[3]_R = \{3\}$
   $A/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$

3. $R$ は対称的かつ推移的だから, $R$ が反射的であることを示せばよい.
任意の $a \in A$ に対して, ある $b \in A$ が存在して, $(a, b) \in R$ である. このとき, $R$ は対称的だから, $(b, a) \in R$. さらに, $(a, b), (b, a) \in R$ で, $R$ は推移的だから, $(a, a) \in R$. すなわち, $R$ は反射的である.

4. 任意の整数 $x$ に対して, $x - x = 0 \cdot m$ だから, $x \equiv_m x$. すなわち, $\equiv_m$ は反射的である.
任意の整数 $x, y$ に対して, $x \equiv_m y$ とすると, $x - y = k \cdot m$ ($k$ は整数) とおける. このとき, $y - x = -k \cdot m$ ($-k$ は整数) だから, $y \equiv_m x$. すなわち, $\equiv_m$ は対称的である.
任意の整数 $x, y, z$ に対して, $x \equiv_m y, y \equiv_m z$ とすると, $x - y = k_1 \cdot m, y - z = k_2 \cdot m$ ($k_1, k_2$ は整数) とおける. このとき, $x - z = (k_1 + k_2) \cdot m$ ($k_1 + k_2$ は整数) だから, $x \equiv_m z$. すなわち, $\equiv_m$ は推移的である.
以上から, $\equiv_m$ は同値関係である.

5. $$\begin{aligned}[(2,7)]_\sim &= \{(x, y) \mid y = 5 + x, x, y \in A\} \\ &= \{(1,6), (2,7), (3,8), (4,9), (5,10), (6,11), (7,12), (8,13), (9,14), (10,15)\}\end{aligned}$$

6. 任意の $(a,b) \in \mathbf{N}^2$ に対して, $ab = ba$ だから, $(a,b) \simeq (a,b)$. すなわち, $\simeq$ は反射的である.
任意の $(a,b),(c,d) \in \mathbf{N}^2$ に対して, $(a,b) \simeq (c,d)$ とすると, $ad = bc$. このとき, $cb = da$ だから, $(c,d) \simeq (a,b)$. すなわち, $\simeq$ は対称的である.
任意の $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbf{N}^2$ に対して, $(a,b) \simeq (c,d), (c,d) \simeq (e,f)$ とすると, $ad = bc, cf = de$. このとき, $adcf = bcde$ だから, $af = be$ であり, $(a,b) \simeq (e,f)$. すなわち, $\simeq$ は推移的である.
以上から, $\simeq$ は同値関係である.

7.
   - 直和分割
     $\pi_1 = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$
     $\pi_2 = \{\{a,b\},\{c\}\}$
     $\pi_3 = \{\{a,c\},\{b\}\}$
     $\pi_4 = \{\{b,c\},\{a\}\}$
     $\pi_5 = \{\{a,b,c\}\}$
   - 同値関係
     $R_{\pi_1} = (\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b\} \times \{b\}) \cup (\{c\} \times \{c\}) = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$
     $R_{\pi_2} = (\{a,b\} \times \{a,b\}) \cup (\{c\} \times \{c\}) = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$
     $R_{\pi_3} = (\{a,c\} \times \{a,c\}) \cup (\{b\} \times \{b\}) = \{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c)\}$
     $R_{\pi_4} = (\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b,c\} \times \{b,c\}) = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$
     $R_{\pi_5} = \{a,b,c\} \times \{a,b,c\} = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$
   - 任意の $R_{\pi_i}$ $(i = 1,2,3,4,5)$ に対して, $R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_i}$ だから, 最も細かい分割は $\pi_1$ である.
     任意の $R_{\pi_i}$ $(i = 1,2,3,4,5)$ に対して, $R_{\pi_i} \subseteq R_{\pi_5}$ だから, 最も粗い分割は $\pi_5$ である.

8. $\{\{1\},\{2,3,4\}\}$
$\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$
$\{\{1\},\{3\},\{2,4\}\}$
$\{\{1\},\{4\},\{2,3\}\}$
$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

9. (1) $\displaystyle\bigcup_{X \in \pi} X^2 = (\{a,c\} \times \{a,c\}) \cup (\{b\} \times \{b\}) = \{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c),(b,b)\}$.
   (2) $R = \displaystyle\bigcup_{X \in \pi} X^2$ だから, (1) より, $[a]_R = \{x \mid (a,x) \in R\} = \{a,c\}$.
   (3) $\pi_{\max} = \{\{a,b,c\}\}$.
   $\pi_{\min} = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$.
   (4) $$\begin{aligned} R_{\max} &= \bigcup_{X \in \pi_{\max}} X^2 = (\{a,b,c\} \times \{a,b,c\}) \\ &= \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}. \\ R_{\min} &= \bigcup_{X \in \pi_{\min}} X^2 = (\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b\} \times \{b\}) \cup (\{c\} \times \{c\}) \\ &= \{(a,a),(b,b),(c,c)\}. \end{aligned}$$

10. $R \circ S$ は同値関係であるとする.
任意の $(x,y) \in R \circ S$ に対して, $R \circ S$ は対称的だから, $(y,x) \in R \circ S$. ゆえに, ある $z \in A$ が存在して, $(y,z) \in S$, $(z,x) \in R$. $R, S$ は対称的だから, $(z,y) \in S$, $(x,z) \in R$. ゆえに, $(x,y) \in S \circ R$.
したがって, $R \circ S \subseteq S \circ R$.
一方, 任意の $(x,y) \in S \circ R$ に対して, ある $z \in A$ が存在して, $(x,z) \in R$, $(z,y) \in S$. $R, S$ は対称的だから, $(z,x) \in R$, $(y,z) \in S$. ゆえに, $(y,x) \in R \circ S$. $R \circ S$ は対称的だから, $(x,y) \in R \circ S$. したがって, $S \circ R \subseteq R \circ S$.
以上から, $R \circ S = S \circ R$.