離散数学演習 3　解答例

1. (1) 任意の $x \in A$ に対して, $(x,x) \in R$.

   (2) 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \in R$ ならば $(y,x) \in R$.

   (3) 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \in R$ かつ $(y,x) \in R$ ならば $x = y$.

   (4) 任意の $x,y,z \in A$ に対して, $(x,y) \in R$ かつ $(y,z) \in R$ ならば $(x,z) \in R$.

   (5) $\{(x,x) \mid x \in A\}$

   (6) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$
   （別解）$\{(x,y) \mid$ ある $x_0, x_1, \cdots, x_n\ (n \geq 1)$ に対して，$x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R\ (i = 0, 1, \cdots, n-1)\}$

   (7) $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$
   （別解）$I_A \cup R^+$
   （別解）$\{(x,y) \mid$ ある $x_0, x_1, \cdots, x_n\ (n \geq 0)$ に対して，$x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R\ (i = 0, 1, \cdots, n-1)\}$

2. R: $(2,2) \notin R$ だから, R は反射的でない.
   $(1,2) \in R$ に対して, $(2,1) \notin R$ だから, R は対称的でない.
   $(1,1),(1,1) \in R$ に対して, $(1,1) \in R$.
   $(1,1),(1,2) \in R$ に対して, $(1,2) \in R$.
   $(1,1),(1,3) \in R$ に対して, $(1,3) \in R$.
   $(1,3),(3,3) \in R$ に対して, $(1,3) \in R$.
   $(3,3),(3,3) \in R$ に対して, $(3,3) \in R$.
   以上から, 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y),(y,z) \in R$ ならば $(x,z) \in R$ だから, R は推移的である.
   $(1,1),(1,1) \in R$ に対して, $1 = 1$.
   $(3,3),(3,3) \in R$ に対して, $3 = 3$.
   以上から, 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y),(y,x) \in R$ ならば $x = y$ だから, R は反対称的である.

   S: $(1,1),(2,2),(3,3) \in S$ だから, S は反射的である.
   $(1,1) \in S$ に対して, $(1,1) \in S$.
   $(1,2) \in S$ に対して, $(2,1) \in S$.
   $(2,1) \in S$ に対して, $(1,2) \in S$.
   $(2,2) \in S$ に対して, $(2,2) \in S$.
   $(3,3) \in S$ に対して, $(3,3) \in S$.
   以上から, 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \in S$ ならば $(y,x) \in S$ だから,S は対称的である.
   $(1,1),(1,1) \in S$ に対して, $(1,1) \in S$.
   $(1,1),(1,2) \in S$ に対して, $(1,2) \in S$.
   $(1,2),(2,1) \in S$ に対して, $(1,1) \in S$.
   $(1,2),(2,2) \in S$ に対して, $(1,2) \in S$.
   $(2,1),(1,1) \in S$ に対して, $(2,1) \in S$.
   $(2,1),(1,2) \in S$ に対して, $(2,2) \in S$.
   $(2,2),(2,1) \in S$ に対して, $(2,1) \in S$.
   $(2,2),(2,2) \in S$ に対して, $(2,2) \in S$.
   $(3,3),(3,3) \in S$ に対して, $(3,3) \in S$.
   以上から, 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y),(y,z) \in S$ ならば $(x,z) \in S$ だから, S は推移的である.
   $(1,2),(2,1) \in S$ に対して, $1 \neq 2$ だから, S は反対称的でない.

   T: $(3,3) \notin T$ だから, T は反射的でない.
   $(1,2) \in T$ に対して, $(2,1) \notin T$ だから, T は対称的でない.
   $(1,2),(2,3) \in T$ に対して, $(1,3) \notin T$ だから, T は推移的でない.
   $(1,1),(1,1) \in T$ に対して, $1 = 1$.
   $(2,2),(2,2) \in T$ に対して, $2 = 2$.

以上から, 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in T$ かつ $(y, x) \in T$ ならば $x = y$ だから, T は反対称的である.

3. ϕ: ある $x \in A$ に対して, $(x, x) \notin \phi$ である. ゆえに, 任意の $x \in A$ に対して $(x, x) \in \phi$ ではないから, ϕ は反射的でない.
$(x, y) \in \phi$ かつ $(y, x) \notin \phi$ である $x, y \in A$ は存在しない[1]. ゆえに, 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in \phi$ ならば $(y, x) \in \phi$ だから, ϕ は対称的である.
$(x, y), (y, x) \in \phi$ かつ $x \neq y$ である $x, y \in A$ は存在しない[2]. ゆえに, 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y), (y, x) \in \phi$ ならば $x = y$ だから, ϕ は反対称的である.
$(x, y), (y, z) \in \phi$ かつ $(x, z) \notin \phi$ である $x, y, z \in A$ は存在しない[3]. ゆえに, 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $(x, y), (y, x) \in \phi$ ならば, $(x, z) \in \phi$ だから, ϕ は推移的である.
(任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \notin \phi$ だから, ϕ が対称的, 推移的, 反対称的であることはそれぞれ (空虚に) 成り立つ.)

A^2: 任意の $x \in A$ に対して, $(x, x) \in A^2$ だから, A^2 は反射的である.
任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in A^2$ とすると, $(y, x) \in A^2$ だから, A^2 は対称的である.
$A = \{1, 2\}$ のとき, $(1, 2), (2, 1) \in A^2$ に対して, $1 \neq 2$ だから, A^2 は反対称的でない.
任意の $x, y, z \in A$ に対して, $(x, y), (y, z) \in A^2$ とすると, $(x, z) \in A^2$ だから, A^2 は推移的である.

I_A: 任意の $x \in A$ に対して, $(x, x) \in I_A$ だから, I_A は反射的である.
任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in I_A$ とすると, $x = y$ だから, $(y, x) \in I_A$. ゆえに, I_A は対称的である.
任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y), (y, x) \in I_A$ とすると, $x = y$ だから, I_A は反対称的である.
任意の $x, y, z \in A$ に対して, $(x, y), (y, z) \in I_A$ とすると, $x = y = z$ だから, $(x, z) \in I_A$. ゆえに, I_A は推移的である.

4. (1) R, S は反射的だから, 任意の $x \in A$ に対して, $(x, x) \in R$, $(x, x) \in S$. ゆえに, $(x, x) \in R \cap S$ だから, $R \cap S$ は反射的である.

(2) 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in R \cap S$ とする. このとき, $(x, y) \in R$ かつ $(x, y) \in S$. R は対称的だから, $(x, y) \in R$ ならば, $(y, x) \in R$. また, S は対称的だから, $(x, y) \in S$ ならば, $(y, x) \in S$. ゆえに, $(y, x) \in R$ かつ $(y, x) \in S$ だから, $(y, x) \in R \cap S$. したがって, $R \cap S$ は対称的である.

(3) 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $(x, y), (y, z) \in R \cap S$ とする. このとき, $(x, y), (y, z) \in R$ かつ $(x, y), (y, z) \in S$. R は推移的だから, $(x, y), (y, z) \in R$ ならば, $(x, z) \in R$. また, S は推移的だから, $(x, y), (y, z) \in S$ ならば, $(x, z) \in S$. ゆえに, $(x, z) \in R$ かつ $(x, z) \in S$ だから, $(x, z) \in R \cap S$. したがって, $R \cap S$ は推移的である.

(4) 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y), (y, x) \in R^{-1}$ とする. このとき, $(y, x), (x, y) \in R$. R は反対称的だから, $x = y$. したがって, R^{-1} は反対称的である.

(5) 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in R \cup R^{-1}$ とする. このとき, $(x, y) \in R$ または $(x, y) \in R^{-1}$. ゆえに, $(y, x) \in R^{-1}$ または $(y, x) \in R$. すなわち, $(y, x) \in R \cup R^{-1}$. したがって, $R \cup R^{-1}$ は対称的である.

5. 「…任意の x, y に対して, xRy ならば yRx である. このとき, xRy, yRx から, …」の部分が誤り.
「xRy ならば yRx」が成り立つとしても, このとき「xRy かつ yRx」が成り立つとは限らない.
実際, 空関係は対称的かつ推移的であるが, 反射的ではない.

6. (1) R は反射的であるとする. ゆえに, 任意の $x \in A$ に対して, $(x, x) \in R$. $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ だから, $I_A \subseteq R$.
$I_A \subseteq R$ とする. 任意の $x \in A$ に対して, $(x, x) \in I_A \subseteq R$ だから, R は反射的である.

(2) R は対称的であるとする. 任意の $(x, y) \in R^{-1}$ に対して, $(y, x) \in R$. R は対称的だから, $(x, y) \in R$. ゆえに, $R^{-1} \subseteq R$.
$R^{-1} \subseteq R$ とする. また, 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in R$ とする. このとき, $(y, x) \in R^{-1} \subseteq R$ だから, R は対称的である.

(3) R は推移的であるとする. 任意の $(x, y) \in R^2$ に対して, $R^2 = R \circ R$ だから, ある $z \in A$ に対して, $(x, z) \in R$ かつ $(z, y) \in R$. R は推移的だから, $(x, y) \in R$. ゆえに, $R^2 \subseteq R$.

[1] すなわち, ϕ が対称的であることの定義に対する反例は存在しない.
[2] すなわち, ϕ が反対称的であることの定義に対する反例は存在しない.
[3] すなわち, ϕ が推移的であることの定義に対する反例は存在しない.

$R^2 \subseteq R$ とする．また，任意の $x, y, z \in A$ に対して，$(x, y), (y, z) \in R$ とする．このとき，$(x, z) \in R^2 \subseteq R$ だから，R は推移的である．

7. $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ とし，$R \subseteq A^2$ とする．

(1) R が反射的であるためには，$I_A = \{(1,1), (2,2), \cdots, (n,n)\} \subseteq R$ であればよい．ゆえに，$R - I_A$ を定めると，反射的な関係 R が一つ定まる．
$R - I_A \subseteq A^2 - I_A$ だから，求める数は $A^2 - I_A$ の部分集合の総数 $|\mathcal{P}(A^2 - I_A)|$ である．
ここで，$I_A \subset A^2$, $|I_A| = n$, $|A^2| = n^2$ だから，$|A^2 - I_A| = |A^2| - |I_A| = n^2 - n$．したがって，$|\mathcal{P}(A^2 - I_A)| = 2^{n^2 - n}$．

(2) R が対称的であるためには，$(x, y) \in R$ ならば，$(y, x) \in R$ であればよい．ゆえに，$B = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y\}$ に対して，$R \subseteq B$ を定めると，R は対称的である．
ゆえに，求める数は B の部分集合の総数 $|\mathcal{P}(B)|$ である．
ここで，$|B| = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ だから，$|\mathcal{P}(B)| = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$．

(3) (1), (2) から，$B - I_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y\}$ に対して，$R \subseteq B$ を定めると，反射的かつ対称的な関係 $R \cup I_A$ が一つ定まる．
ゆえに，求める数は $B - I_A$ の部分集合の総数 $|\mathcal{P}(B - I_A)|$ である．
ここで，$|B - I_A| = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ だから，$|\mathcal{P}(B - I_A)| = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$．

8. (1) 任意の x, y, z に対して，$(x, y), (y, z) \in R^*$ とする．$(x, y) \in R^*$ だから，ある $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 0)$ に対して，$x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$．また，$(y, z) \in R^*$ だから，ある $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_m$ $(m \geq n)$ に対して，$x_n = y, x_m = z, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = n, n+1, \cdots, m-1)$．ゆえに，$x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_m$ に対して，$x_0 = x, x_m = z, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, m-1)$．したがって，$(x, z) \in R^*$ であるから，R^* は推移的である．

(2) R は推移的であるとする．
明らかに，$R \subseteq R^+$．
一方，任意の x, y に対して，$(x, y) \in R^+$ とする．このとき，ある $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 1)$ に対して，$x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$．$(x_0, x_1), (x_1, x_2) \in R$ で，R は推移的だから，$(x_0, x_2) \in R$．さらに，$(x_0, x_2), (x_2, x_3) \in R$ で，R は推移的だから，$(x_0, x_3) \in R$．同様に繰り返すと，$(x_0, x_n) \in R$．すなわち，$(x, y) \in R$．ゆえに，$R^+ \subseteq R$．
以上から，$R = R^+$．

(3) R は反射的であるとする．このとき，任意の x に対して，$(x, x) \in R \subseteq R^+$．ゆえに，$R^+$ は反射的である．

(4) R は対称的であるとする．
また，任意の x, y に対して，$(x, y) \in R^*$ とする．このとき，ある $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 0)$ に対して，$x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$．R は対称的だから，$(x_{i+1}, x_i) \in R$ $(i = 0, \cdots, n-1)$．ゆえに，$x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0$ に対して，$x_n = y, x_0 = x, (x_{i+1}, x_i) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ であるから，$(y, x) \in R^*$．したがって，R^* は対称的である．

(5) $R \subseteq S$ とする．
また，任意の x, y に対して，$(x, y) \in R^*$ とする．このとき，ある $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 0)$ に対して，$x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, \cdots, n-1)$．$R \subseteq S$ だから，$(x_i, x_{i+1}) \in S$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$．ゆえに，$x_0, x_1, \cdots, x_n$ に対して，$x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in S$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ であるから，$(x, y) \in S^*$．したがって，$R^* \subseteq S^*$．

(6) $R \subseteq S$，かつ，S は推移的であるとする．
また，任意の x, y に対して，$(x, y) \in R^+$ とする．このとき，ある $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 1)$ に対して，$x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$．$R \subseteq S$ だから，$(x_i, x_{i+1}) \in S$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$．$(x_0, x_1), (x_1, x_2) \in S$ で，S は推移的だから，$(x_0, x_2) \in S$．さらに，$(x_0, x_2), (x_2, x_3) \in S$ で，S は推移的だから，$(x_0, x_3) \in S$．同様に繰り返すと，$(x_0, x_n) \in S$．すなわち，$(x, y) \in S$．ゆえに，$R^+ \subseteq S$．

9. (1) n に関する帰納法を用いて示す．
（基底段階）$n = 2$ のとき．このとき $k = 1$ である．

$$\begin{aligned} R^{n-k} \circ R^k &= R^{2-1} \circ R^1 \\ &= R \circ R \\ &= R^2 \\ &= R^n \end{aligned}$$

だから，$n=2$ のとき，命題は成り立つ．
（帰納段階）$n=m$ のときに命題は成り立つと仮定する．$n=m+1$ のときを考え, k に関する帰納法を用いて示す[1]．

i) （基底段階）$k=1$ のとき．

$$\begin{aligned} R^{n-k}\circ R^k &= R^{(m+1)-1}\circ R^1 \\ &= R^m\circ R \\ &= R^{m+1} \\ &= R^n \end{aligned}$$

ii) （帰納段階）$2\le k\le n-1=m$ のとき．このとき, $k-1$ に対して命題は成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned} R^{n-k}\circ R^k &= R^{(m+1)-k}\circ R^k \\ &= R^{(m+1)-k}\circ(R^{k-1}\circ R^1) \quad (R^k \text{ の定義}) \\ &= R^{m-(k-1)}\circ(R^{k-1}\circ R^1) \\ &= (R^{m-(k-1)}\circ R^{k-1})\circ R^1 \quad \text{（関係の合成に関する結合則）} \\ &= R^m\circ R \quad \text{（}k\text{ に関する帰納法の仮定）} \\ &= R^{m+1} \\ &= R^n \end{aligned}$$

ゆえに, 任意の k に対して, 命題は成り立つ．
以上から，$n=m+1$ のときも命題は成り立つ．
すなわち, 任意の n に対して, 命題は成り立つ．

(2) 任意の $(x,y),(y,z)\in R^+$ に対して，$R^+=\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$ だから, $n,m\ (\ge 1)$ が存在して，$(x,y)\in R^n,(y,z)\in R^m$．ゆえに，$(x,z)\in R^m\circ R^n$．
(1) から $R^m\circ R^n=R^{m+n}$ だから，$(x,z)\in R^{m+n}\subseteq R^+$．
ゆえに，R^+ は推移的である．

(3) 任意の $x\in A$ に対して，$(x,x)\in I_A\subseteq R^*$．ゆえに, R^* は反射的である．
任意の $(x,y),(y,z)\in R^*$ に対して, $R^*=I_A\cup R^+$ だから, 次の i)〜iv) の場合が考えられる．

i) $(x,y),(y,z)\in I_A$ のとき．
このとき, $x=y=z$ だから $(x,z)\in I_A\subseteq R^*$．ゆえに, R^* は推移的である．

ii) $(x,y),(y,z)\in R^+$ のとき．
このとき, (2) から R^+ は推移的だから, $(x,z)\in R^+\subseteq R^*$．ゆえに, R^* は推移的である．

iii) $(x,y)\in I_A$, $(y,z)\in R^+$ のとき．
このとき, $x=y$ だから, $(x,z)\in R^+\subseteq R^*$．ゆえに, R^* は推移的である．

iv) $(x,y)\in R^+$, $(y,z)\in I_A$ のとき．
(iii) と同様に, R^* は推移的である．

以上から, R^* は推移的である．

10. 集合 A に対して, $R\subseteq A^2$ とする．

（例） 連続的 (serial) ：任意の $x\in A$ に対して, $y\in A$ が存在して, xRy である．
比較可能（comparable）（完全 (total)）：任意の $x,y\in A$ に対して, xRy または yRx である．
非反射的 (irreflexive) ：任意の $x\in A$ に対して, xRx でない．
非対称的 (asymmetric) ：任意の $x,y\in A$ に対して, xRy ならば, yRx でない．
Euclid 的 (Euclidean) ：任意の $x,y,z\in A$ に対して, xRy かつ xRz ならば, yRz である．
合流的 (confluent) ：任意の $x,y,z\in A$ に対して, xRy かつ xRz ならば, $w\in A$ が存在して, yRw かつ zRw である．

11. 略.

[1] 二重帰納法であることに注意せよ．すなわち, n に関する帰納法の中で, k に関する帰納法を用いる．