# 離散数学演習２　解答例

1. (1) $a = c$ かつ $b = d$.

   (2) $\{(x, y) \mid x \in A$ かつ $y \in B\}$

   (3) $R \subseteq A \times B$.

   (4) $(a, b) \in R$.

   (5) $\{x \in A \mid$ ある $y \in B$ に対して, $xRy\}$

   (6) $\{y \in B \mid$ ある $x \in A$ に対して, $xRy\}$

   (7) $\{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$

   (8) $(A \times B) - R$

   (9) $\{(x, z) \mid$ ある $y \in B$ に対して, $(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in S\}$

2. (1) i) $\{(b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)\}$

   ii) $\{(2, b), (2, c), (3, b), (3, c)\}$

   iii) $\{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$

   iv) $\{b, c, 2, 3\} \times B = \{(b, 2),\ (b, 3),\ (c, 2),\ (c, 3),\ (2, 2),\ (2, 3),\ (3, 2),\ (3, 3)\}$

   v) $\phi \times B = \phi$

   vi) $A^2 = \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$

   vii) $\{(b, 2, \alpha),\ (b, 2, \beta),\ (b, 3, \alpha),\ (b, 3, \beta),\ (c, 2, \alpha),\ (c, 2, \beta),\ (c, 3, \alpha),\ (c, 3, \beta)\}$

   viii) $\{(b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)\} \times C = \{((b, 2), \alpha),\ ((b, 2), \beta),\ ((b, 3), \alpha),\ ((b, 3), \beta),\ ((c, 2), \alpha),$ $((c, 2), \beta),\ ((c, 3), \alpha),\ ((c, 3), \beta)\}$

   ix) $A \times \{(2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)\} = \{(b, (2, \alpha)),\ (b, (2, \beta)),\ (b, (3, \alpha)),\ (b, (3, \beta)),\ (c, (2, \alpha)),$ $(c, (2, \beta)),\ (c, (3, \alpha)),\ (c, (3, \beta))\}$

   (2) i) 誤. $(A \times B) \cup (B \times A) = \{(b, 2),\ (b, 3),\ (c, 2),\ (c, 3),\ (2, b),\ (2, c),\ (3, b),\ (3, c)\} \neq \phi$

   ii) 誤. $(b, b) \in A \times A$ に対して, $(b, b) \notin A \times B$.

   iii) 誤. $(c, c) \in A \times A$.

   iv) 正. $(b, 3) \in A \times B, (3, b) \in B \times A$.

   v) 正.

   vi) 正. $b, c \in A, 2, 3 \in B$ だから, $\{(b, 2), (c, 3)\} \subseteq A \times B$.

   vii) 正. $b \in A$ だから, $\{(b, b)\} \subseteq A^2$.

3. 
$$\begin{aligned} R \cup S &= \{(1, a), (3, a), (2, b), (3, b), (1, b)\} \\ R \cap S &= \{(2, b)\} \\ R^c &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\} - R \\ &= \{(1, b), (2, a)\} \end{aligned}$$

4. (1) 定義域 $\{b, c\}$, 値域 $\{b, 2, 3\}$

   (2) $A \times (A \cup B) =\{(b, b),\ (b, c),\ (b, 2),\ (b, 3),\ (c, b),\ (c, c),\ (c, 2),\ (c, 3)\}$ だから,
$$\begin{aligned} R^c &= A \times (A \cup B) - R \\ &= \{(b, c), (b, 3), (c, b), (c, c)\} \\ R^{-1} &= \{(b, b), (2, b), (2, c), (3, c)\} \end{aligned}$$

   (3)
$$\begin{aligned} (R^c)^{-1} &= \{(c, b), (3, b), (b, c), (c, c)\} \\ (R^{-1})^c &= ((A \cup B) \times A) - R^{-1} \\ &= \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c)\} - R^{-1} \\ &= \{(b, c), (c, b), (c, c), (3, b)\} \end{aligned}$$
   ゆえに, $(R^c)^{-1} = (R^{-1})^c$.

5. $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)\}$

6. (1)
$$\begin{aligned} S \circ R &= \{(1, 2), (1, 4), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 4), (4, 3)\} \\ R \circ S &= \{(3, 4), (3, 1), (1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 3), (2, 1), (1, 3)\} \end{aligned}$$

(2) $R^{-1} = \{(1,1),(1,2),(4,3),(2,2),(3,3),(4,4),(1,4)\}$

$R^{-1}\circ R = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(4,1),(4,2)\}$

$(1,2)\in R^{-1}\circ R$ に対して, $(1,2)\notin I$ だから, $R^{-1}\circ R\neq I$.

(3) $S^{-1} = \{(4,3),(2,1),(4,1),(3,2),(4,2),(3,1)\}$

$S^{-1}\circ S = \{(3,3),(3,1),(3,2),(1,1),(1,3),(1,2),(2,2),(2,1),(2,3)\}$

$(3,1)\in S^{-1}\circ S$ に対して, $(3,1)\notin I$ だから, $S^{-1}\circ S\not\subseteq I$.

7.
$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(B) &= \{X | X\subseteq B\}\\
&= \{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}\}\\
\subseteq &= \{(X,Y)\in\mathcal{P}(B)^2 | X\subseteq Y\}\\
&= \{\ (\phi,\phi),(\phi,\{a\}),(\phi,\{b\}),(\phi,\{c\}),(\phi,\{a,b\}),(\phi,\{b,c\}),(\phi,\{c,a\}),(\phi,\{a,b,c\}),\\
&\quad (\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a,b\}),(\{a\},\{c,a\}),(\{a\},\{a,b,c\}),\\
&\quad (\{b\},\{b\}),(\{b\},\{a,b\}),(\{b\},\{b,c\}),(\{b\},\{a,b,c\}),\\
&\quad (\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b,c\}),(\{c\},\{c,a\}),(\{c\},\{a,b,c\}),\\
&\quad (\{a,b\},\{a,b\}),(\{a,b\},\{a,b,c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),(\{b,c\},\{a,b,c\}),\\
&\quad (\{c,a\},\{c,a\}),(\{c,a\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\ \}
\end{aligned}
$$

8. (1) 任意の $(x,y)\in A\times(B\cap C)$ に対して, $x\in A$, $y\in B\cap C$. すなわち, $y\in B$ かつ $y\in C$. ゆえに, $(x,y)\in A\times B$ かつ $(x,y)\in A\times C$ だから, $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$. したがって, $A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C)$.
一方, 任意の $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$ に対して, $(x,y)\in A\times B$ かつ $(x,y)\in A\times C$. すなわち, $x\in A$ で, $y\in B$ かつ $y\in C$. ゆえに, $y\in B\cap C$ だから, $(x,y)\in A\times(B\cap C)$. したがって, $(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C)$.
以上から, $(A\times B)\cap(A\times C)=A\times(B\cap C)$.

(2) 任意の $(x,y)\in A\times(B\cup C)$ に対して, $x\in A$, $y\in B\cup C$. すなわち, $y\in B$ または $y\in C$. ゆえに, $(x,y)\in A\times B$ または $(x,y)\in A\times C$ だから, $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$. したがって, $A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$.
一方, 任意の $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$ に対して, $(x,y)\in A\times B$ または $(x,y)\in A\times C$. すなわち, $x\in A$ で, $y\in B$ または $y\in C$. ゆえに, $y\in B\cup C$ だから, $(x,y)\in A\times(B\cup C)$. したがって, $(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$.
以上から, $(A\times B)\cup(A\times C)=A\times(B\cup C)$.

9. (1) 任意の $(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$ に対して, $(y,x)\in R^{-1}$. ゆえに, $(x,y)\in R$. したがって, $(R^{-1})^{-1}\subseteq R$.
一方, 任意の $(x,y)\in R$ に対して, $(y,x)\in R^{-1}$. ゆえに, $(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$. したがって, $R\subseteq(R^{-1})^{-1}$.
以上から, $(R^{-1})^{-1}=R$.

(2) 任意の $(x,y)\in R^{-1}$ に対して, $(y,x)\in R\subseteq S$. ゆえに, $(x,y)\in S^{-1}$ だから, $R^{-1}\subseteq S^{-1}$.

(3) 任意の $(x,y)\in(R\cup S)^{-1}$ に対して, $(y,x)\in R\cup S$. すなわち, $(y,x)\in R$ または $(y,x)\in S$. ゆえに, $(x,y)\in R^{-1}$ または $(x,y)\in S^{-1}$. したがって, $(x,y)\in R^{-1}\cup S^{-1}$ だから, $(R\cup S)^{-1}\subseteq R^{-1}\cup S^{-1}$.
一方, 任意の $(x,y)\in R^{-1}\cup S^{-1}$ に対して, $(x,y)\in R^{-1}$ または $(x,y)\in S^{-1}$. すなわち, $(y,x)\in R$ または $(y,x)\in S$. ゆえに, $(y,x)\in R\cup S$ だから, $(x,y)\in(R\cup S)^{-1}$. したがって, $R^{-1}\cup S^{-1}\subseteq(R\cup S)^{-1}$.
以上から, $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$.

(4) 任意の $(x,y)\in(R\cap S)^{-1}$ に対して, $(y,x)\in R\cap S$. すなわち, $(y,x)\in R$ かつ $(y,x)\in S$. ゆえに, $(x,y)\in R^{-1}$ かつ $(x,y)\in S^{-1}$. したがって, $(x,y)\in R^{-1}\cap S^{-1}$ だから, $(R\cap S)^{-1}\subseteq R^{-1}\cap S^{-1}$.
一方, 任意の $(x,y)\in R^{-1}\cap S^{-1}$ に対して, $(x,y)\in R^{-1}$ かつ $(x,y)\in S^{-1}$. すなわち, $(y,x)\in R$ かつ $(y,x)\in S$. ゆえに, $(y,x)\in R\cap S$ だから, $(x,y)\in(R\cap S)^{-1}$. したがって, $R^{-1}\cap S^{-1}\subseteq(R\cap S)^{-1}$.
以上から, $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$.

(5) 任意の $(x,y)\in(R-S)^{-1}$ に対して, $(y,x)\in R-S$. すなわち, $(y,x)\in R$ かつ $(y,x)\notin S$. ゆえに, $(x,y)\in R^{-1}$ かつ $(x,y)\notin S^{-1}$. したがって, $(x,y)\in R^{-1}-S^{-1}$ だから, $(R-S)^{-1}\subseteq R^{-1}-S^{-1}$.
一方, 任意の $(x,y)\in R^{-1}-S^{-1}$ に対して, $(x,y)\in R^{-1}$ かつ $(x,y)\notin S^{-1}$. すなわち, $(y,x)\in R$ かつ $(y,x)\notin S$. したがって, $(y,x)\in R-S$ だから, $(x,y)\in(R-S)^{-1}$ であり, $R^{-1}-S^{-1}\subseteq(R-S)^{-1}$.
以上から, $(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$.

10. 任意の $(x,y) \in (T \circ S) \circ R$ に対して, ある $z \in B$ が存在して, $(x,z) \in R$ かつ $(z,y) \in T \circ S$. さらに, ある $w \in C$ が存在して, $(z,w) \in S$ かつ $(w,y) \in T$. $(x,z) \in R$, $(z,w) \in S$ だから, $(x,w) \in S \circ R$. さらに, $(w,y) \in T$ だから, $(x,y) \in T \circ (S \circ R)$. したがって, $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$.

一方, 任意の $(x,y) \in T \circ (S \circ R)$ に対して, ある $z \in C$ が存在して, $(x,z) \in S \circ R$ かつ $(z,y) \in T$. さらに, ある $w \in B$ が存在して, $(x,w) \in R$ かつ $(w,z) \in S$. $(w,z) \in S$, $(z,y) \in T$ だから, $(w,y) \in T \circ S$. さらに, $(x,w) \in R$ だから, $(x,y) \in (T \circ S) \circ R$. したがって, $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$.

以上から, $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.