離散数学演習 12　解答例

1. $(F, +, \cdot, c, e)$ を体とし, 任意の $x, y \in F$ に対して, $xy = c$, $x \neq c$ とする. F は可換環でもあるから, $y = c$ を示せばよい. ところで, F は体だから, $x^{-1} \in F$ が存在する. $xy = c$ だから, $x^{-1}xy = x^{-1}c$. $x^{-1}xy = ey = y$, $x^{-1}c = c$ だから, $y = c$.

2. R は環だから, $R[x]$ 上の演算を自然に定義すれば, 明らかに $R[x]$ は可換環である.
$f(x), g(x) \in R[x]$ とする. このとき, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ $(a_n \neq 0, a_1, \cdots, a_n \in R)$, $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ $(b_m \neq 0, b_1, \cdots, b_m \in R)$ とおける.
さらに, $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ とする. R は整域であり, $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ だから, $a_n b_m \neq 0$.
$f(x)g(x)$ は $m + n$ 次の多項式で, $f(x)g(x) \in R[x]$. $a_n b_m$ は $f(x)g(x)$ の最高次の係数だから, $f(x)g(x) \neq 0$.
ゆえに, $R[x]$ は整域である.

3. $(\mathbf{Z}^2, +, \cdot)$ は可換環であり, 加法の単位元は $(0, 0)$ である. 任意の $a, b \in \mathbf{Z}$ $(a, b \neq 0)$ に対して, $(0, a), (b, 0) \in \mathbf{Z}^2$ を考えると, $(0, a), (b, 0) \neq (0, 0)$. ところが, $(0, a) \cdot (b, 0) = (0b, a0) = (0, 0)$ だから, $(0, a), (b, 0)$ は零因子である. ゆえに, $(\mathbf{Z}^2, +, \cdot)$ は整域ではない.

4. (1) $I^2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & (-i)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = E,$

$J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E,$

$K^2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$

(2) $IJ = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = K,$

$JK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = I,$

$KI = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = J.$

$IJ = K$ から, $I^2 J = IK$. $I^2 = -E$ だから, $-J = IK$. ゆえに, $J = -IK$.
$JK = I$ から, $J^2 K = JI$. $J^2 = -E$ だから, $-K = JI$. ゆえに, $K = -JI$.
$KI = J$ から, $K^2 I = KJ$. $K^2 = -E$ だから, $-I = KJ$. ゆえに, $I = -KJ$.

(3) i) 任意の $A_1 = a_1E + b_1I + c_1J + d_1K, A_2 = a_2E + b_2I + c_2J + d_2K \in H$ に対して,

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= (a_1E + b_1I + c_1J + d_1K) + (a_2E + b_2I + c_2J + d_2K) \\ &= (a_1 + a_2)E + (b_1 + b_2)I + (c_1 + c_2)J + (d_1 + d_2)K \end{aligned}$$

$a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2 \in \mathbf{R}$ だから, $A_1 + A_2 \in H$.

一方,
$$\begin{aligned} A_1A_2 &= (a_1E + b_1I + c_1J + d_1K) \cdot (a_2E + b_2I + c_2J + d_2K) \\ &= (a_1a_2E^2 + a_1b_2EI + a_1c_2EJ + a_1d_2EK) \\ &\quad +(b_1a_2IE + b_1b_2I^2 + b_1c_2IJ + b_1d_2IK) \\ &\quad +(c_1a_2JE + c_1b_2JI + c_1c_2J^2 + c_1d_2JK) \\ &\quad +(d_1a_2KE + d_1b_2KI + d_1c_2KJ + d_1d_2K^2) \\ &= (a_1a_2E + a_1b_2I + a_1c_2J + a_1d_2K) \\ &\quad +(b_1a_2I - b_1b_2E + b_1c_2K - b_1d_2J) \\ &\quad +(c_1a_2J - c_1b_2K - c_1c_2E + c_1d_2I) \\ &\quad +(d_1a_2K + d_1b_2J - d_1c_2I - d_1d_2E) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)E + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)I \\ &\quad +(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)J + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)K \end{aligned}$$

$a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2, a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2, a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2 \in \mathbf{R}$ だから, $A_1A_2 \in H$.
ゆえに, H は加法 $+$ と乗法 $\cdot$ に関して閉じているので, $(H, +, \cdot)$ は代数系である.

ii) 任意の $A_1 = a_1E + b_1I + c_1J + d_1K, A_2 = a_2E + b_2I + c_2J + d_2K, A_3 = a_3E + b_3I + c_3J + d_3K \in H$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(A_1+A_2)+A_3 &= ((a_1+a_2)+a_3)E+((b_1+b_2)+b_3)I+((c_1+c_2)+c_3)J \\
&\quad +((d_1+d_2)+d_3)K \\
&= (a_1+(a_2+a_3))E+(b_1+(b_2+b_3))I+(c_1+(c_2+c_3))J \\
&\quad +(d_1+(d_2+d_3)K \\
&= A_1+(A_2+A_3)
\end{aligned}
$$

となるから, 加法の結合則が成り立つ.

iii) $O=0E+0I+0J+0K\in H$ を考えると, 任意の $A=aE+bI+cJ+dK\in H$ に対して,
$O+A=(0+a)E+(0+b)I+(0+c)J+(0+d)K=aE+bI+cJ+dK=A$,
$A+O=(a+0)E+(b+0)I+(c+0)J+(d+0)K=aE+bI+cJ+dK=A$.
ゆえに, O は加法の単位元である.

iv) 任意の $A=aE+bI+cJ+dK\in H$ に対して, $-A=(-a)E+(-b)I+(-c)J+(-d)K\in H$ を考えると, $A+(-A)=(a+(-a))E+(b+(-b))I+(c+(-c))J+(d+(-d))K=0E+0I+0J+0K=O$,
$(-A)+A=((-a)+a)E+((-b)+b)I+((-c)+c)J+((-d)+d)K=0E+0I+0J+0K=O$
ゆえに, A に対して, 加法の逆元は $-A$ である.

v) 任意の $A_1=a_1E+b_1I+c_1J+d_1K, A_2=a_2E+b_2I+c_2J+d_2K\in H$ に対して,

$$
\begin{aligned}
A_1+A_2 &= (a_1+a_2)E+(b_1+b_2)I+(c_1+c_2)J+(d_1+d_2)K \\
&= (a_2+a_1)E+(b_1+b_1)I+(c_2+c_1)J+(d_2+d_1)K \\
&= A_2+A_1
\end{aligned}
$$

となるから, 加法の交換則が成り立つ.

vi) 任意の $A_1 = a_1E + b_1I + c_1J + d_1K, A_2 = a_2E + b_2I + c_2J + d_2K, A_3 = a_3E + b_3I + c_3J + d_3K \in H$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(A_1A_2)A_3 \quad &= \quad ((a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)E + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)I \\
&\quad +(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)J + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)K) \\
&\quad \cdot(a_3E + b_3I + c_3J + d_3K) \\
&= \quad (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)a_3E^2 + (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)b_3EI \\
&\quad +(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)c_3EJ + (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)d_3EK \\
&\quad +(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)a_3IE + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)b_3I^2 \\
&\quad +(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)c_3IJ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)d_3IK \\
&\quad +(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)a_3JE + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)b_3JI \\
&\quad +(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)c_3J^2 + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)d_3JK \\
&\quad +(a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)a_3KE + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)b_3KI \\
&\quad +(a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)c_3KJ + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)d_3K^2 \\
&= \quad (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)a_3E + (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)b_3I \\
&\quad +(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)c_3J + (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)d_3K \\
&\quad +(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)a_3I - (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)b_3E \\
&\quad +(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)c_3K - (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)d_3J \\
&\quad +(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)a_3J - (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)b_3K \\
&\quad -(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)c_3E + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)d_3I \\
&\quad +(a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)a_3K + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)b_3J \\
&\quad -(a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)c_3I - (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)d_3E \\
&= \quad ((a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)a_3 - (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)b_3 \\
&\quad -(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)c_3 - (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)d_3))E \\
&\quad +((a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)b_3 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)a_3 \\
&\quad +(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)d_3 - (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)c_3))I \\
&\quad +((a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)c_3 - (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)d_3 \\
&\quad +(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)a_3 + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)b_3))J \\
&\quad +((a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)d_3 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)c_3 \\
&\quad -(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)b_3 + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)a_3)K) \\
&= \quad (a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - a_1c_2c_3 - a_1d_2d_3 - a_2b_1b_3 - a_2c_1c_3 - a_2d_1d_3 - a_3b_1b_2 \\
&\quad -a_3c_1c_2 - a_3d_1d_2 - b_1c_2d_3 + b_1c_3d_2 + b_2c_1d_3 - b_2c_3d_1 - b_3c_1d_2 + b_3c_2d_1)E \\
&\quad +(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_1c_2d_3 - a_1c_3d_2 + a_2a_3b_1 + a_2c_1d_3 - a_2c_3d_1 + a_3c_1d_2 \\
&\quad -a_3c_2d_1 - b_1b_2b_3 - b_1c_2c_3 - b_1d_2d_3 + b_2c_1c_3 + b_2d_1d_3 - b_3c_1c_2 - b_3d_1d_2)I \\
&\quad +(a_1a_2c_3 + a_1a_3c_2 - a_1b_2d_3 + a_1b_3d_2 + a_2a_3c_1 - a_2b_1d_3 + a_2b_3d_1 - a_3b_1d_2 \\
&\quad +a_3b_2d_1 - b_1b_2c_3 + b_1b_3c_2 - b_2b_3c_1 - c_1c_2c_3 - c_1d_2d_3 + c_2d_3d_1 - c_3d_1d_2)J \\
&\quad +(a_1a_2d_3 + a_1a_3d_2 + a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2a_3d_1 + a_2b_1c_3 - a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 \\
&\quad -a_3b_2c_1 - b_1b_2d_3 + b_1b_3d_2 - b_2b_3d_1 - c_1c_2d_3 + c_1c_3d_2 - c_2c_3d_1 - d_1d_2d_3)K
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1(A_2A_3) &= (a_1E+b_1I+c_1J+d_1K) \\
&\quad \cdot((a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3)E+(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3)I \\
&\quad +(a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3)J+(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3)K) \\
&= a_1(a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3)E^2+a_1(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3)EI \\
&\quad +a_1(a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3)EJ+a_1(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3)EK \\
&\quad +b_1(a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3)IE+b_1(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3)I^2 \\
&\quad +b_1(a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3)IJ+b_1(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3)IK \\
&\quad +c_1(a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3)JE+c_1(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3)JI \\
&\quad +c_1(a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3)J^2+c_1(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3)JK \\
&\quad +d_1(a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3)KE+d_1(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3)KI \\
&\quad +d_1(a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3)KJ+d_1(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3)K^2 \\
&= a_1(a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3)E+a_1(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3)I \\
&\quad +a_1(a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3)J+a_1(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3)K \\
&\quad +b_1(a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3)I-b_1(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3)E \\
&\quad +b_1(a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3)K-b_1(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3)J \\
&\quad +c_1(a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3)J-c_1(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3)K \\
&\quad -c_1(a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3)E+c_1(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3)I \\
&\quad +d_1(a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3)K+d_1(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3)J \\
&\quad -d_1(a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3)I-d_1(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3)E \\
&= (a_1(a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3)-b_1(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3) \\
&\quad -c_1(a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3)-d_1(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3))E \\
&\quad +(a_1(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3)+b_1(a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3) \\
&\quad +c_1(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3)-d_1(a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3))I \\
&\quad +(a_1(a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3)-b_1(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3) \\
&\quad +c_1(a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3)+d_1(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3))J \\
&\quad +(a_1(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3)+b_1(a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3) \\
&\quad -c_1(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3)+d_1(a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3))K \\
&= (a_1a_2a_3-a_1b_2b_3-a_1c_2c_3-a_1d_2d_3-a_2b_1b_3-a_2c_1c_3-a_2d_1d_3-a_3b_1b_2 \\
&\quad -a_3c_1c_2-a_3d_1d_2-b_1c_2d_3+b_1c_3d_2+b_2c_1d_3-b_2c_3d_1-b_3c_1d_2+b_3c_2d_1)E \\
&\quad +(a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_1c_2d_3-a_1c_3d_2+a_2a_3b_1+a_2c_1d_3-a_2c_3d_1+a_3c_1d_2 \\
&\quad -a_3c_2d_1-b_1b_2b_3-b_1c_2c_3-b_1d_2d_3+b_2c_1c_3+b_2d_1d_3-b_3c_1c_2-b_3d_1d_2)I \\
&\quad +(a_1a_2c_3+a_1a_3c_2-a_1b_2d_3+a_1b_3d_2+a_2a_3c_1-a_2b_1d_3+a_2b_3d_1-a_3b_1d_2 \\
&\quad +a_3b_2d_1-b_1b_2c_3+b_1b_3c_2-b_2b_3c_1-c_1c_2c_3-c_1d_2d_3+c_2d_1d_3-c_3d_1d_2)J \\
&\quad +(a_1a_2d_3+a_1a_3d_2+a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2a_3d_1+a_2b_1c_3-a_2b_3c_1+a_3b_1c_2 \\
&\quad -a_3b_2c_1-b_1b_2d_3+b_1b_3d_2-b_2b_3d_1-c_1c_2d_3+c_1c_3d_2-c_2c_3d_1-d_1d_2d_3)K
\end{aligned}
$$

となるから, $(A_1A_2)A_3 = A_1(A_2A_3)$. ゆえに, 乗法の結合則が成り立つ.

vii) $E = 1E+0I+0J+0K \in H$ を考えると, 任意の $A = aE+bI+cJ+dK \in H$ に対して,
$EA = E(aE+bI+cJ+dK) = aE^2+bEI+cEJ+dEK = aE+bI+cJ+dK = A$,
$AE = (aE+bI+cJ+dK)E = aE^2+bIE+cJE+dKE = aE+bI+cJ+dK = A$.
ゆえに, E は乗法の単位元である.

viii) 任意の $A_1 = a_1E + b_1I + c_1J + d_1K, A_2 = a_2E + b_2I + c_2J + d_2K, A_3 = a_3E + b_3I + c_3J + d_3K \in H$ に対して,

$$
\begin{aligned}
A_1(A_2 + A_3) &= (a_1E + b_1I + c_1J + d_1K) \\
&\quad \cdot((a_2E + b_2I + c_2J + d_2K) + (a_3E + b_3I + c_3J + d_3K)) \\
&= (a_1E + b_1I + c_1J + d_1K) \\
&\quad \cdot((a_2 + a_3)E + (b_2 + b_3)I + (c_2 + c_3)J + (d_2 + d_3)K) \\
&= (a_1(a_2 + a_3))E^2 + (a_1(b_2 + b_3))EI + (a_1(c_2 + c_3))EJ + (a_1(d_2 + d_3))EK \\
&\quad +(b_1(a_2 + a_3))IE + (b_1(b_2 + b_3))I^2 + (b_1(c_2 + c_3))IJ + (b_1(d_2 + d_3))IK \\
&\quad +(c_1(a_2 + a_3))JE + (c_1(b_2 + b_3))JI + (c_1(c_2 + c_3))J^2 + (c_1(d_2 + d_3))JK \\
&\quad +(d_1(a_2 + a_3))KE + (d_1(b_2 + b_3))KI + (d_1(c_2 + c_3))KJ + (d_1(d_2 + d_3))K^2 \\
&= (a_1(a_2 + a_3))E + (a_1(b_2 + b_3))I + (a_1(c_2 + c_3))J + (a_1(d_2 + d_3))K \\
&\quad +(b_1(a_2 + a_3))I - (b_1(b_2 + b_3))E + (b_1(c_2 + c_3))K - (b_1(d_2 + d_3))J \\
&\quad +(c_1(a_2 + a_3))J - (c_1(b_2 + b_3))K - (c_1(c_2 + c_3))E + (c_1(d_2 + d_3))I \\
&\quad +(d_1(a_2 + a_3))K + (d_1(b_2 + b_3))J - (d_1(c_2 + c_3))I - (d_1(d_2 + d_3))E \\
&= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3) - c_1(c_2 + c_3) - d_1(d_2 + d_3))E \\
&\quad +(a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3) + c_1(d_2 + d_3) - d_1(c_2 + c_3))I \\
&\quad +a_1(d_2 + d_3) - (b_1(d_2 + d_3) + (c_1(a_2 + a_3) + d_1(b_2 + b_3)J \\
&\quad +(a_1(c_2 + c_3) + b_1(c_2 + c_3) - c_1(b_2 + b_3) + d_1(a_2 + a_3)K \\
&= ((a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1a_3 - b_1b_3 - c_1c_3 - d_1d_3))E \\
&\quad +((a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2) + (a_1b_3 + b_1a_3 + c_1d_3 - d_1c_3))I \\
&\quad +((a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2) + (a_1c_3 - b_1d_3 + c_1a_3 + d_1b_3))J \\
&\quad +((a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2) + (a_1d_3 + b_1c_3 - c_1b_3 + d_1a_3))K.
\end{aligned}
$$

一方,

$$
\begin{aligned}
A_1A_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)E + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)I \\
&\quad +(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)J + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)K, \\
A_1A_3 &= (a_1a_3 - b_1b_3 - c_1c_3 - d_1d_3)E + (a_1b_3 + b_1a_3 + c_1d_3 - d_1c_3)I \\
&\quad +(a_1c_3 - b_1d_3 + c_1a_3 + d_1b_3)J + (a_1d_3 + b_1c_3 - c_1b_3 + d_1a_3)K, \\
A_1A_2 + A_1A_3 &= ((a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1a_3 - b_1b_3 - c_1c_3 - d_1d_3))E \\
&\quad +((a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2) + (a_1b_3 + b_1a_3 + c_1d_3 - d_1c_3))I \\
&\quad +((a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2) + (a_1c_3 - b_1d_3 + c_1a_3 + d_1b_3))J \\
&\quad +((a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2) + (a_1d_3 + b_1c_3 - c_1b_3 + d_1a_3))K \\
&= ((a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1a_3 - b_1b_3 - c_1c_3 - d_1d_3))E \\
&\quad +((a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2) + (a_1b_3 + b_1a_3 + c_1d_3 - d_1c_3))I \\
&\quad +((a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2) + (a_1c_3 - b_1d_3 + c_1a_3 + d_1b_3))J \\
&\quad +((a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2) + (a_1d_3 + b_1c_3 - c_1b_3 + d_1a_3))K
\end{aligned}
$$

となるから, $A_1(A_2 + A_3) = A_1A_2 + A_1A_3$.
同様に, $(A_1 + A_2)A_3 = A_1A_3 + A_2A_3$ を示せる.
したがって, 分配則が成り立つ.

i)〜viii) から, $(H, +, \cdot)$ は環である.

(4) $k = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ とおく.

$$
\begin{aligned}
kAB &= (aE + bI + cJ + dK)(aE - bI - cJ - dK) \\
&= (a^2E^2 - abEI - acEJ - adEK) + (abIE - b^2I^2 - bcIJ - bdIK) \\
&\quad +(acJE - bcJI - c^2J^2 - cdJK) + (adKE - bdKI - cdKJ - d^2K^2) \\
&= (a^2E - abI - acJ - adK) + (abI + b^2E - bcK + bdJ) \\
&\quad +(acJ + bcK + c^2E - cdI) + (adK - bdJ + cdI + d^2E) \\
&= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)E + (-ab + ab - cd + cd)I \\
&\quad +(-ac + bd + ac - bd)J + (-ad - bc + bc + ad)K \\
&= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)E \\
&= kE
\end{aligned}
$$

となるから, $AB = E$
同様に, $BA = E$ を示せる.

5. (1) 2 項演算 $\cdot$ は, 2 引数であり, 各引数の選び方にそれぞれ 0, 1 の 2 通りがあるので, 引数のすべての組は 2^2 通りである. その各組に対して, 2 項演算の値の選び方はそれぞれ 0, 1 の 2 通りがあるので, 結局, 2 項演算 $\cdot$ は次の a)〜p) の $2^{2^2} = 16$ 通りが考えられる.

a)

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	0

b)

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

c)

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	1	0

d)

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	1	1

e)

$\cdot$	0	1
0	0	1
1	0	0

f)

$\cdot$	0	1
0	0	1
1	0	1

g)

$\cdot$	0	1
0	0	1
1	1	0

h)

$\cdot$	0	1
0	0	1
1	1	1

i)

$\cdot$	0	1
0	1	0
1	0	0

j)

$\cdot$	0	1
0	1	0
1	0	1

k)

$\cdot$	0	1
0	1	0
1	1	0

l)

$\cdot$	0	1
0	1	0
1	1	1

m)

$\cdot$	0	1
0	1	1
1	0	0

n)

$\cdot$	0	1
0	1	1
1	0	1

o)

$\cdot$	0	1
0	1	1
1	1	0

p)

$\cdot$	0	1
0	1	1
1	1	1

(2) 単位元が存在するものは, b), g), h), j).
b) の単位元 1, g) の単位元 0, h) の単位元 0, j) の単位元 1.

(3) 交換則が成り立つものは, 乗積表が対角線に関して対称になっているから,
a), b), g), h), i), j), o), p) である.

6. (1)

$\cdot$	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

(2) $E \in G$ を考えると, $EE = E$, $AE = EA = A$, $BE = EB = B$, $CE = EC = C$. ゆえに, 任意の $X \in G$ に対して, $XE = EX = X$. すなわち, E は単位元である.

(3) $EE = E$ だから, E の逆元 $E^{-1} = E$.
$AA = E$ だから, A の逆元 $A^{-1} = A$.
$BB = E$ だから, B の逆元 $B^{-1} = B$.
$CC = E$ だから, C の逆元 $C^{-1} = C$.

(4) (1)〜(3) から, 以下のことは明らかである.

- 任意の $X, Y, Z \in G$ に対して, $X(YZ) = (XY)Z$. すなわち, 結合則が成り立つ.
- 単位元が存在する.
- 任意の $X \in G$ に対して, 逆元 X^{-1} が存在する
- 任意の $X, Y \in G$ に対して, $XY = YX$. すなわち, 交換則が成り立つ.

以上から, G は可換群である.

7. (1)

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

(2) $f_1 \in H$ を考えると, $f_1 \circ f_1 = f_1$, $f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2 = f_2$, $f_3 \circ f_1 = f_1 \circ f_3 = f_3$, $f_4 \circ f_1 = f_1 \circ f_4 = f_4$. ゆえに, 任意の $f_i \in H$ に対して, $f_i \circ f_1 = f_1 \circ f_i = f_1$. すなわち, f_1 は単位元である.

(3) $f_1 \circ f_1 = f_1$ だから, f_1 の逆元 $f_1^{-1} = f_1$.
$f_2 \circ f_2 = f_1$ だから, f_2 の逆元 $f_2^{-1} = f_2$.
$f_3 \circ f_3 = f_1$ だから, f_3 の逆元 $f_3^{-1} = f_3$.
$f_4 \circ f_4 = f_1$ だから, f_4 の逆元 $f_4^{-1} = f_4$.

(4) (1)〜(3) から, 以下のことは明らかである.

- 任意の $f_i, f_j, f_k \in H$ に対して, $f_i \circ (f_j \circ f_k) = (f_i \circ f_j) \circ f_k$. すなわち, 結合則が成り立つ.
- 単位元が存在する.
- 任意の $f_i \in H$ に対して, 逆元 f_i^{-1} が存在する
- 任意の $f_i, f_j \in H$ に対して, $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$. すなわち, 交換則が成り立つ.

以上から, H は可換群である.

8. i) 任意の $(a,b), (c,d), (e,f) \in G$ に対して,
$(a,b) \star ((c,d) \star (e,f)) = (a,b) \star (ce, de+f) = (ace, bce+de+f)$,
$((a,b) \star (c,d)) \star (e,f) = (ac, bc+d) \star (e,f) = (ace, (bc+d)e+f) = (ace, bce+de+f)$.
ゆえに, $(a,b) \star ((c,d) \star (e,f)) = ((a,b) \star (c,d)) \star (e,f)$. したがって, 結合則が成り立つ.

ii) 任意の $(a,b) \in G$ に対して, $(1,0) \in G$ を考えると,
$(a,b) \star (1,0) = (a \cdot 1, b \cdot 1 + 0) = (a,b)$,
$(1,0) \star (a,b) = (1 \cdot a, 0 \cdot a + b) = (a,b)$.
ゆえに, $(1,0)$ は単位元である.

iii) 任意の $(a,b) \in G$ に対して, $\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a} \in \mathbf{R}$, $\dfrac{1}{a} \neq 0$ だから, $\left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a}\right) \in G$.
ここで, $(a,b) \star \left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a}\right) = \left(a \cdot \dfrac{1}{a}, b \cdot \dfrac{1}{a} - \dfrac{b}{a}\right) = (1,0)$,
$\left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a}\right) \star (a,b) = \left(\dfrac{1}{a} \cdot a, -\dfrac{b}{a} \cdot a + b\right) = (1,0)$.
ゆえに, (a,b) の逆元は $\left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a}\right)$ である.

i)〜iii) から, $(G, \star)$ は群である.

9. (1) $ax = ay$ とする.

x	$=$	ex	(単位元の存在)
	$=$	$(a^{-1}a)x$	(逆元の存在)
	$=$	$a^{-1}(ax)$	(結合則)
	$=$	$a^{-1}(ay)$	($ax = ay$)
	$=$	$(a^{-1}a)y$	(結合則)
	$=$	ey	(逆元の存在)
	$=$	y	(単位元の存在)

(2) $(ab)^2 = a^2b^2$ とする.

ab	$=$	$e(ab)e$	(単位元の存在)
	$=$	$(a^{-1}a)(ab)(bb^{-1})$	(逆元の存在)
	$=$	$a^{-1}(a(ab))(bb^{-1})$	(結合則)
	$=$	$a^{-1}((aa)b)(bb^{-1})$	(結合則)
	$=$	$a^{-1}(aa)(b(bb^{-1}))$	(結合則)
	$=$	$a^{-1}(aa)(bb)b^{-1}$	(結合則)
	$=$	$a^{-1}a^2b^2b^{-1}$	
	$=$	$a^{-1}(ab)^2b^{-1}$	($(ab)^2 = a^2b^2$)
	$=$	$a^{-1}(ab)(ab)b^{-1}$	
	$=$	$((a^{-1}a)b)(a(bb^{-1}))$	(結合則)
	$=$	$(eb)(ae)$	(逆元の存在)
	$=$	ba	(単位元の存在)

10. G は性質 (1)〜(3) を満たすとする.
性質 (3) から, 任意の $x \in G$ に対して, $y \in G$ が存在して, $yx = e$.
さらに, 性質 (3) から, この $y \in G$ に対して, $z \in G$ が存在して, $zy = e$.

ここで,
$$
\begin{aligned}
xy &= (ex)y && (2)\\
&= e(xy) && (1)\\
&= (zy)(xy) &&\\
&= z(y(xy)) && (1)\\
&= z((yx)y) && (1)\\
&= z(ey) &&\\
&= zy && (2)\\
&= e
\end{aligned}
$$
ゆえに, $xy = yx = e$. すなわち, y は x の逆元である.
一方,
$$
\begin{aligned}
xe &= x(yx) &&\\
&= (xy)x && (1)\\
&= ex &&\\
&= x
\end{aligned}
$$
ゆえに, $xe = ex = x$. すなわち, e は単位元である.
性質 (1) から, G は結合則が成り立つ.
以上から, G は群である.

逆に, G が群であるならば, 明らかに, 性質 (1)〜(3) を満たす.