離散数学演習 1　解答例

1. (1) 任意の $x \in A$ に対して，$x \in B$.
   (2) $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$.
   (3) $A \subseteq B$ かつ $A \neq B$.
   (4) $\{x \mid x \in A$ または $x \in B\}$
   (5) $\{x \mid x \in A$ かつ $x \in B\}$
   (6) $\{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$
   (7) $A \cap B = \phi$.
   (8) $U - A$
   (9) $\{S \mid S \subseteq A\}$
2. (1) 正.
   (2) 誤.
   (3) 誤.
   (4) 正.
   (5) 誤.
   (6) 正. B のすべての要素は a, b であり, $a, b \in A$.
   (7) 正. D のすべての要素は b, c であり, $b, c \in A$ だから, $D \subseteq A$. しかし, $a \in A$ に対して, $a \notin D$ だから, $D \neq A$.
   (8) 誤. $a \in A$ に対して, $a \notin C$.
   (9) 誤. $c \in D$ に対して, $c \notin E$.
   (10) 正.
   (11) 誤. $a \in E$ に対して, $a \notin F$.
   (12) 正
   (13) 誤. $a \in B$ に対して, $a \notin G$.
   (14) 正. $\{B\}$ のすべての要素は $B = \{a, b\}$ であり, $B \in G$.
   (15) 誤. $b \in D$ に対して, $b \notin G$.
   (16) 誤. $D = \{b, c\} \in \{D\}$ に対して, $D \notin G$.
   (17) 誤. $\{a, b\} \in G$ に対して, $\{a, b\} \notin A$.
   (18) 正. $\{\{c\}\}$ のすべての要素は $\{c\}$ であり, $\{c\} \in E$.
3. (1) 正.
   (2) 誤. $\{S\}$ の要素は S である.
   (3) 正. $\{S\}$ のすべての要素は S であり, $S \in \{S\}$.
   (4) $\{\{S\}\}$
4. A: (1) $\{x \mid x$ は正の 5 の倍数 $\}$
   (2)
   - $5 \in A$.
   - $x \in A$ ならば $x + 5 \in A$.
   - A は他の要素を含まない.

   B: (1) $\{x \mid x$ は 1 の位が 7 である自然数 $\}$
   (2)
   - $7 \in B$.
   - $x \in B$ ならば $x + 10 \in B$.
   - B は他の要素を含まない.

   C: (1) $\{x \mid x$ は 300 以上 400 以下の整数 $\}$
   (2)
   - $300 \in C$.
   - $x \in C$ かつ $x < 400$ ならば $x + 1 \in C$.
   - C は他の要素を含まない.

   D: (1) $\{x \mid x$ または $x + 1$ は正の 4 の倍数 $\}$
   (2)
   - $3 \in D, 4 \in D$.
   - $x \in D$ ならば $x + 4 \in D$.
   - D は他の要素を含まない.

   E: (1) $\{x \mid x$ は 0, または正および負の 2 の倍数 $\}$
   (2)
   - $0 \in E$.
   - $x \in E$ ならば $x + 2 \in E$.
   - $x \in E$ ならば $-x \in E$.
   - E は他の要素を含まない.

   F: (1) $\{x \mid x = \dfrac{1}{2^n}, n$ は負でない整数 $\}$
   (2)
   - $1 \in F$.
   - $x \in F$ ならば $\dfrac{x}{2} \in F$.
   - F は他の要素を含まない.

5. (1) S_2, S_3, S_7
(2) $S_1, S_3, S_4, S_5, S_6, S_8$
(3) S_6, S_7
(4) S_6, S_7, S_8, S_9
(5) S_3
(6) S_4, S_6

6. (1) $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{a,b,c\}\}$
(2) $\{\phi, \{a\}\}$
(3) $\{\phi\}$
(4) $\{\phi, \{\phi\}\}$
(5) $\mathcal{P}(\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}) = \{\ \phi,\ \{\phi\},\ \{\{a\}\},\ \{\{b\}\},\ \{\{a,b\}\},\ \{\phi, \{a\}\},\ \{\phi, \{b\}\},\ \{\phi, \{a,b\}\},$ $\{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a,b\}\}, \{\{b\}, \{a,b\}\}, \{\phi, \{a\}, \{b\}\}, \{\phi, \{a\}, \{a.b\}\}, \{\phi, \{b\}, \{a,b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\},$ $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}\ \}$

7. (1) $\{a,b,c,2\}$
(2) $\{a,b,c,2,3,4\}$
(3) $\{b,c,a,\{c\}\}$
(4) $\{a,b,\{a,b\},\{c,2\}\}$
(5) $\{b,c\}$
(6) $\{a,b\}$
(7) $\{a,b\}$
(8) $\{c\}$
(9) ϕ
(10) ϕ
(11) ϕ
(12) $\{c,2,3,4\}$
(13) ϕ
(14) $\{2\}$
(15) $\{a,b,\{c\}\}$
(16) ϕ
(17) $\{\{a,b\},\{c,2\}\}$

8. $U = \{a,b,c,2,3,4,\{c\},\{a,b\},\{c,2\}\}$
(1) $\{a,b\} \cup C = \{a,b,c,2\}$
(2) $A \cap \{a,b,c,2\} = \{a,b,c,2\}$
(3) $\{a,b,c,2\} - \{c,2,b\} = \{a\}$
(4) $A \cap \{2\} = \{2\}$
(5) $\{c,2\} - \{b,c\} = \{2\}$
(6) $\{a,b,c,2,3,4,\{c\}\}$
(7) $\{b\}^c = \{a,c,2,3,4,\{c\},\{a,b\},\{c,2\}\}$
(8) $(D \cup \{c,2,3,4,\{a,b\},\{c,2\}\})^c = \{a,\{c\}\}$
(9) $F \cap \{c,2,3,4\} = \phi$
(10) $\{a,b\} \cup U = \{a,b,c,2,3,4,\{c\},\{a,b\},\{c,2\}\}$
(11) $\{c,2,b\} \cap U = \{c,2,b\}$
(12) $C \cap \{a,2,3,4,\{c\},\{a,b\},\{c,2\}\} = \{2\}$
(13) $G \cup U = \{a,b,c,2,3,4,\{c\},\{a,b\},\{c,2\}\}$
(14) $\phi^c = U = \{a,b,c,2,3,4,\{c\},\{a,b\},\{c,2\}\}$

9. (1) i) $\{a,b,c,d\}$
ii) $\{c\}$
iii) $\{a,b,c,d\}$
iv) $\{a,b,c,d,e,f\}$
v) $\{c,d\}$
vi) ϕ
vii) $\{a,b\}$
(2) 成り立たない. $\{A,B\}$ のすべての要素は A,B である.
(3) 成り立つ.

10. (1) 任意の $x \in A$ に対して, $x \in A$ または $x \in B$. すなわち, $x \in A \cup B$. ゆえに, $A \subseteq A \cup B$.
(2) 任意の $x \in A \cup B$ に対して, $x \in A$ または $x \in B$. いずれの場合も $x \in C$ だから, $A \cup B \subseteq C$.
(3) (a) $A \subseteq B$ ならば $A \cup B = B$ と (b) $A \cup B = B$ ならば $A \subseteq B$ を示せばよい.
(a) 任意の $x \in A \cup B$ に対して, $x \in A$ または $x \in B$. いずれの場合も $x \in B$ だから, $A \cup B \subseteq B$.
また, (1) より $B \subseteq A \cup B$.
以上から, $A \cup B = B$.
(b) 任意の $x \in A$ に対して, (1) より $x \in A \cup B = B$. ゆえに, $A \subseteq B$.
(4) 任意の $x \in A \cap B$ に対して, $x \in A$ かつ $x \in B$. すなわち, $x \in A$ である. ゆえに, $A \cap B \subseteq A$.
(5) 任意の $x \in C$ に対して, $x \in A$ かつ $x \in B$. すなわち, $x \in A \cap B$ だから, $C \subseteq A \cap B$.
(6) (a) $A \subseteq B$ ならば $A \cap B = A$ と (b) $A \cap B = A$ ならば $A \subseteq B$ を示せばよい.
(a) (4) より $A \cap B \subseteq A$.
一方, 任意の $x \in A$ に対して, $x \in B$ だから, $x \in A \cap B$. ゆえに, $A \subseteq A \cap B$.
以上から, $A \cap B = A$.
(b) 任意の $x \in A$ に対して, $x \in A \cap B$ だから, $x \in B$. ゆえに, $A \subseteq B$.

11. (1)
- 任意の $x \in A \cup A^c$ に対して, $x \in A \subseteq U$ または $x \in U - A$. 後者のとき, $x \in U$ かつ $x \notin A$. いずれの場合も, $x \in U$ だから, $A \cup A^c \subseteq U$.
一方, 任意の $x \in U$ に対して, $x \in A$ または $x \in A^c$ だから, $x \in A \cup A^c$. ゆえに, $U \subseteq A \cup A^c$.
以上から, $A \cup A^c = U$.

- $x \in A \cap A^c$ となる x は存在しないので, 任意の $x \in A \cap A^c$ に対して, $x \in \phi$ は明らか. ゆえに, $A \cap A^c \subseteq \phi$.
  一方, 明らかに, $\phi \subseteq A \cap A^c$.
  以上から, $A \cap A^c = \phi$.

(2) 任意の $x \in B^c$ に対して, $x \notin B$. ここで, $x \in A$ と仮定すると, $A \subseteq B$ だから, $x \in B$. これは矛盾. すなわち, $x \notin A$. ゆえに, $x \in A^c$ だから, $B^c \subseteq A^c$.

(3) 任意の $x \in A-B$ に対して, $x \in A$ かつ $x \notin B$. すなわち, $x \in A$ かつ $x \in B^c$ だから, $x \in A \cap B^c$. ゆえに, $A - B \subseteq A \cap B^c$.
一方, 任意の $x \in A \cap B^c$ に対して, $x \in A$ かつ $x \in B^c$ だから, $x \in A$ かつ $x \notin B$. すなわち, $x \in A - B$. ゆえに, $A \cap B^c \subseteq A - B$.
以上から, $A - B = A \cap B^c$.

(4)
- $U^c = U - U$ だから, $x \in U^c$ である x は存在しない. ゆえに, 任意の $x \in U^c$ に対して, $x \in \phi$ であることは明らか.
  一方, 明らかに, $\phi \subseteq U^c$.
  以上から, $U^c = \phi$.
- 任意の $x \in \phi^c$ に対して, $x \in U$ かつ $x \notin \phi$. すなわち, $\phi^c \subseteq U$.
  一方, 任意の $x \in U$ に対して, $x \notin \phi$ だから, $x \in U - \phi = \phi^c$. ゆえに, $U \subseteq \phi^c$.
  以上から, $\phi^c = U$.

(5) $(A^c)^c = U - A^c$ だから, 任意の $x \in (A^c)^c$ に対して, $x \in U$ かつ $x \notin A^c$. すなわち, $x \in A$. ゆえに, $(A^c)^c \subseteq A$.
一方, 任意の $x \in A$ に対して, $x \in U$ かつ $x \notin A^c$. すなわち $x \in (A^c)^c$. ゆえに, $A \subseteq (A^c)^c$.
以上から, $(A^c)^c = A$.

12. (1) 任意の $x \in (A \cup B)^c$ に対して, $x \notin A \cup B$. ゆえに, $x \notin A$ かつ $x \notin B$ だから, $x \in A^c$ かつ $x \in B^c$. すなわち, $x \in A^c \cap B^c$. したがって, $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.
一方, 任意の $x \in A^c \cap B^c$ に対して, $x \in A^c$ かつ $x \in B^c$. ゆえに, $x \notin A$ かつ $x \notin B$ だから, $x \notin A \cup B$. すなわち, $x \in (A \cup B)^c$. したがって, $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$.
以上から, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(2) 任意の $x \in (A \cap B)^c$ に対して, $x \notin A \cap B$. ゆえに, $x \notin A$ または $x \notin B$ だから, $x \in A^c$ または $x \in B^c$. すなわち, $x \in A^c \cup B^c$. したがって, $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.
一方, 任意の $x \in A^c \cup B^c$ に対して, $x \in A^c$ または $x \in B^c$. ゆえに, $x \notin A$ または $x \notin B$ だから, $x \notin A \cap B$. すなわち, $x \in (A \cap B)^c$ である. したがって, $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.
以上から, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.