離散数学演習 1　解答例

1. (1) 任意の $x \in A$ に対して，$x \in B$.
   (2) $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$.
   (3) $A \subseteq B$ かつ $A \neq B$.
   (4) $\{x \mid x \in A$ または $x \in B\}$
   (5) $\{x \mid x \in A$ かつ $x \in B\}$
   (6) $\{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$
   (7) $A \cap B = \phi$.
   (8) $U - A$
   (9) $\{S \mid S \subseteq A\}$

2. (1) 正.
   (2) 誤.
   (3) 誤.
   (4) 正.
   (5) 誤.
   (6) 正. B のすべての要素は a, b であり, $a, b \in A$.
   (7) 正. D のすべての要素は b, c であり, $b, c \in A$ だから, $D \subseteq A$. しかし, $a \in A$ に対して, $a \notin D$ だから, $D \neq A$.
   (8) 誤. $a \in A$ に対して, $a \notin C$.
   (9) 誤. $c \in D$ に対して, $c \notin E$.
   (10) 正.
   (11) 誤. $a \in E$ に対して, $a \notin F$.
   (12) 正
   (13) 誤. $a \in B$ に対して, $a \notin G$.
   (14) 正. $\{B\}$ のすべての要素は $B = \{a, b\}$ であり, $B \in G$.
   (15) 誤. $b \in D$ に対して, $b \notin G$.
   (16) 誤. $D = \{b, c\} \in \{D\}$ に対して, $D \notin G$.
   (17) 誤. $\{a, b\} \in G$ に対して, $\{a, b\} \notin A$.
   (18) 正. $\{\{c\}\}$ のすべての要素は $\{c\}$ であり, $\{c\} \in E$.

3. (1) 正.
   (2) 誤. $\{S\}$ の要素は S である.
   (3) 正. $\{S\}$ のすべての要素は S であり, $S \in \{S\}$.
   (4) $\{\{S\}\}$

4. A:
   (1) $\{x \mid x$ は正の 5 の倍数 $\}$
   (2)
   - $5 \in A$.
   - $x \in A$ ならば $x + 5 \in A$.
   - A は他の要素を含まない.

   B:
   (1) $\{x \mid x$ は 1 の位が 7 である自然数 $\}$
   (2)
   - $7 \in B$.
   - $x \in B$ ならば $x + 10 \in B$.
   - B は他の要素を含まない.

   C:
   (1) $\{x \mid x$ は 300 以上 400 以下の整数 $\}$
   (2)
   - $300 \in C$.
   - $x \in C$ かつ $x < 400$ ならば $x + 1 \in C$.
   - C は他の要素を含まない.

   D:
   (1) $\{x \mid x$ または $x + 1$ は正の 4 の倍数 $\}$
   (2)
   - $3 \in D, 4 \in D$.
   - $x \in D$ ならば $x + 4 \in D$.
   - D は他の要素を含まない.

   E:
   (1) $\{x \mid x$ は 0, または正および負の 2 の倍数 $\}$
   (2)
   - $0 \in E$.
   - $x \in E$ ならば $x + 2 \in E$.
   - $x \in E$ ならば $-x \in E$.
   - E は他の要素を含まない.

   F:
   (1) $\{x \mid x = \frac{1}{2^n}, n$ は負でない整数 $\}$
   (2)
   - $1 \in F$.
   - $x \in F$ ならば $\frac{x}{2} \in F$.
   - F は他の要素を含まない.

5. (1) S_2, S_3, S_7
(2) $S_1, S_3, S_4, S_5, S_6, S_8$
(3) S_6, S_7
(4) S_6, S_7, S_8, S_9
(5) S_3
(6) S_4, S_6

6. (1) $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{a,b,c\}\}$
(2) $\{\phi, \{a\}\}$
(3) $\{\phi\}$
(4) $\{\phi, \{\phi\}\}$
(5) $\mathcal{P}(\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}) = \{\ \phi,\ \{\phi\},\ \{\{a\}\},\ \{\{b\}\},\ \{\{a,b\}\},\ \{\phi,\{a\}\},\ \{\phi,\{b\}\},\ \{\phi,\{a,b\}\}, \{\{a\},\{b\}\}, \{\{a\},\{a,b\}\}, \{\{b\},\{a,b\}\}, \{\phi,\{a\},\{b\}\}, \{\phi,\{a\},\{a.b\}\}, \{\phi,\{b\},\{a,b\}\}, \{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}, \{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\ \}$

7. (1) $\{a,b,c,2\}$
(2) $\{a,b,c,2,3,4\}$
(3) $\{b,c,a,\{c\}\}$
(4) $\{a,b,\{a,b\},\{c,2\}\}$
(5) $\{b,c\}$
(6) $\{a,b\}$
(7) $\{a,b\}$
(8) $\{c\}$
(9) ϕ
(10) ϕ
(11) ϕ
(12) $\{c,2,3,4\}$
(13) ϕ
(14) $\{2\}$
(15) $\{a,b,\{c\}\}$
(16) ϕ
(17) $\{\{a,b\},\{c,2\}\}$

8. $U = \{a,b,c,2,3,4,\{c\},\{a,b\},\{c,2\}\}$
(1) $\{a,b\} \cup C = \{a,b,c,2\}$
(2) $A \cap \{a,b,c,2\} = \{a,b,c,2\}$
(3) $\{a,b,c,2\} - \{c,2,b\} = \{a\}$
(4) $A \cap \{2\} = \{2\}$
(5) $\{c,2\} - \{b,c\} = \{2\}$
(6) $\{a,b,c,2,3,4,\{c\}\}$
(7) $\{b\}^c = \{a,c,2,3,4,\{c\},\{a,b\},\{c,2\}\}$
(8) $(D \cup \{c,2,3,4,\{a,b\},\{c,2\}\})^c = \{a,\{c\}\}$
(9) $F \cap \{c,2,3,4\} = \phi$
(10) $\{a,b\} \cup U = \{a,b,c,2,3,4,\{c\},\{a,b\},\{c,2\}\}$
(11) $\{c,2,b\} \cap U = \{c,2,b\}$
(12) $C \cap \{a,2,3,4,\{c\},\{a,b\},\{c,2\}\} = \{2\}$
(13) $G \cup U = \{a,b,c,2,3,4,\{c\},\{a,b\},\{c,2\}\}$
(14) $\phi^c = U = \{a,b,c,2,3,4,\{c\},\{a,b\},\{c,2\}\}$

9. (1) i) $\{a,b,c,d\}$
ii) $\{c\}$
iii) $\{a,b,c,d\}$
iv) $\{a,b,c,d,e,f\}$
v) $\{c,d\}$
vi) ϕ
vii) $\{a,b\}$

(2) 成り立たない. $\{A,B\}$ のすべての要素は A, B である.
(3) 成り立つ.

10. (1) 任意の $x \in A$ に対して, $x \in A$ または $x \in B$. すなわち, $x \in A \cup B$. ゆえに, $A \subseteq A \cup B$.
(2) 任意の $x \in A \cup B$ に対して, $x \in A$ または $x \in B$. いずれの場合も $x \in C$ だから, $A \cup B \subseteq C$.
(3) (a) $A \subseteq B$ ならば $A \cup B = B$ と (b) $A \cup B = B$ ならば $A \subseteq B$ を示せばよい.
  (a) 任意の $x \in A \cup B$ に対して, $x \in A$ または $x \in B$. いずれの場合も $x \in B$ だから, $A \cup B \subseteq B$.
  また, (1) より $B \subseteq A \cup B$.
  以上から, $A \cup B = B$.
  (b) 任意の $x \in A$ に対して, (1) より $x \in A \cup B = B$. ゆえに, $A \subseteq B$.
(4) 任意の $x \in A \cap B$ に対して, $x \in A$ かつ $x \in B$. すなわち, $x \in A$ である. ゆえに, $A \cap B \subseteq A$.
(5) 任意の $x \in C$ に対して, $x \in A$ かつ $x \in B$. すなわち, $x \in A \cap B$ だから, $C \subseteq A \cap B$.
(6) (a) $A \subseteq B$ ならば $A \cap B = A$ と (b) $A \cap B = A$ ならば $A \subseteq B$ を示せばよい.
  (a) (4) より $A \cap B \subseteq A$.
  一方, 任意の $x \in A$ に対して, $x \in B$ だから, $x \in A \cap B$. ゆえに, $A \subseteq A \cap B$.
  以上から, $A \cap B = A$.
  (b) 任意の $x \in A$ に対して, $x \in A \cap B$ だから, $x \in B$. ゆえに, $A \subseteq B$.

11. (1)
- 任意の $x \in A \cup A^c$ に対して, $x \in A \subseteq U$ または $x \in U - A$. 後者のとき, $x \in U$ かつ $x \notin A$. いずれの場合も, $x \in U$ だから, $A \cup A^c \subseteq U$.
  一方, 任意の $x \in U$ に対して, $x \in A$ または $x \in A^c$ だから, $x \in A \cup A^c$. ゆえに, $U \subseteq A \cup A^c$.
  以上から, $A \cup A^c = U$.

- $x \in A \cap A^c$ となる x は存在しないので, 任意の $x \in A \cap A^c$ に対して, $x \in \phi$ は明らか. ゆえに, $A \cap A^c \subseteq \phi$.
  一方, 明らかに, $\phi \subseteq A \cap A^c$.
  以上から, $A \cap A^c = \phi$.

(2) 任意の $x \in B^c$ に対して, $x \notin B$. ここで, $x \in A$ と仮定すると, $A \subseteq B$ だから, $x \in B$. これは矛盾. すなわち, $x \notin A$. ゆえに, $x \in A^c$ だから, $B^c \subseteq A^c$.

(3) 任意の $x \in A-B$ に対して, $x \in A$ かつ $x \notin B$. すなわち, $x \in A$ かつ $x \in B^c$ だから, $x \in A \cap B^c$. ゆえに, $A - B \subseteq A \cap B^c$.
一方, 任意の $x \in A \cap B^c$ に対して, $x \in A$ かつ $x \in B^c$ だから, $x \in A$ かつ $x \notin B$. すなわち, $x \in A - B$. ゆえに, $A \cap B^c \subseteq A - B$.
以上から, $A - B = A \cap B^c$.

(4)
- $U^c = U - U$ だから, $x \in U^c$ である x は存在しない. ゆえに, 任意の $x \in U^c$ に対して, $x \in \phi$ であることは明らか.
  一方, 明らかに, $\phi \subseteq U^c$.
  以上から, $U^c = \phi$.
- 任意の $x \in \phi^c$ に対して, $x \in U$ かつ $x \notin \phi$. すなわち, $\phi^c \subseteq U$.
  一方, 任意の $x \in U$ に対して, $x \notin \phi$ だから, $x \in U - \phi = \phi^c$. ゆえに, $U \subseteq \phi^c$.
  以上から, $\phi^c = U$.

(5) $(A^c)^c = U - A^c$ だから, 任意の $x \in (A^c)^c$ に対して, $x \in U$ かつ $x \notin A^c$. すなわち, $x \in A$. ゆえに, $(A^c)^c \subseteq A$.
一方, 任意の $x \in A$ に対して, $x \in U$ かつ $x \notin A^c$. すなわち $x \in (A^c)^c$. ゆえに, $A \subseteq (A^c)^c$.
以上から, $(A^c)^c = A$.

12. (1) 任意の $x \in (A \cup B)^c$ に対して, $x \notin A \cup B$. ゆえに, $x \notin A$ かつ $x \notin B$ だから, $x \in A^c$ かつ $x \in B^c$. すなわち, $x \in A^c \cap B^c$. したがって, $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.
一方, 任意の $x \in A^c \cap B^c$ に対して, $x \in A^c$ かつ $x \in B^c$. ゆえに, $x \notin A$ かつ $x \notin B$ だから, $x \notin A \cup B$. すなわち, $x \in (A \cup B)^c$. したがって, $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$.
以上から, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(2) 任意の $x \in (A \cap B)^c$ に対して, $x \notin A \cap B$. ゆえに, $x \notin A$ または $x \notin B$ だから, $x \in A^c$ または $x \in B^c$. すなわち, $x \in A^c \cup B^c$. したがって, $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.
一方, 任意の $x \in A^c \cup B^c$ に対して, $x \in A^c$ または $x \in B^c$. ゆえに, $x \notin A$ または $x \notin B$ だから, $x \notin A \cap B$. すなわち, $x \in (A \cap B)^c$ である. したがって, $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.
以上から, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

13. (1) 成り立つ.
（証明）任意の $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ に対して, $X \subseteq A \cap B$. ゆえに, 任意の $x \in X$ に対して, $x \in A$ かつ $x \in B$. すなわち, $X \subseteq A$ かつ $X \subseteq B$ だから, $X \in \mathcal{P}(A)$ かつ $X \in \mathcal{P}(B)$. したがって, $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ だから, $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
一方, 任意の $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ に対して, $X \in \mathcal{P}(A)$ かつ $X \in \mathcal{P}(B)$. ゆえに, $X \subseteq A$ かつ $X \subseteq B$. すなわち, 任意の $x \in X$ に対して, $x \in A$ かつ $x \in B$ だから, $x \in A \cap B$. したがって, $X \subseteq A \cap B$ だから, $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. 結局, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.
以上から, $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

(2) 成り立たない.
（反例）$A = \{a\}$, $B = \{b\}$ とする.
このとき, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
一方, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(\{a\}) \cup \mathcal{P}(\{b\}) = \{\phi, \{a\}\} \cup \{\phi, \{b\}\} = \{\phi, \{a\}, \{b\}\}$.
ゆえに, $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

離散数学演習 2　解答例

1. (1) $a = c$ かつ $b = d$.
   (2) $\{(x, y) \mid x \in A$ かつ $y \in B\}$
   (3) $R \subseteq A \times B$.
   (4) $(a, b) \in R$.
   (5) $\{x \in A \mid$ ある $y \in B$ に対して, $xRy\}$
   (6) $\{y \in B \mid$ ある $x \in A$ に対して, $xRy\}$
   (7) $\{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$
   (8) $(A \times B) - R$
   (9) $\{(x, z) \mid$ ある $y \in B$ に対して, $(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in S\}$

2. (1) i) $\{(b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)\}$
   ii) $\{(2, b), (2, c), (3, b), (3, c)\}$
   iii) $\{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$
   iv) $\{b, c, 2, 3\} \times B = \{(b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
   v) $\phi \times B = \phi$
   vi) $A^2 = \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$
   vii) $\{(b, 2, \alpha), (b, 2, \beta), (b, 3, \alpha), (b, 3, \beta), (c, 2, \alpha), (c, 2, \beta), (c, 3, \alpha), (c, 3, \beta)\}$
   viii) $\{(b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)\} \times C = \{((b, 2), \alpha), ((b, 2), \beta), ((b, 3), \alpha), ((b, 3), \beta), ((c, 2), \alpha),$ $((c, 2), \beta), ((c, 3), \alpha), ((c, 3), \beta)\}$
   ix) $A \times \{(2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)\} = \{(b, (2, \alpha)), (b, (2, \beta)), (b, (3, \alpha)), (b, (3, \beta)), (c, (2, \alpha)),$ $(c, (2, \beta)), (c, (3, \alpha)), (c, (3, \beta))\}$

   (2) i) 誤. $(A \times B) \cup (B \times A) = \{(b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c)\} \neq \phi$
   ii) 誤. $(b, b) \in A \times A$ に対して, $(b, b) \notin A \times B$.
   iii) 誤. $(c, c) \in A \times A$.
   iv) 正. $(b, 3) \in A \times B, (3, b) \in B \times A$.
   v) 正.
   vi) 正. $b, c \in A, 2, 3 \in B$ だから, $\{(b, 2), (c, 3)\} \subseteq A \times B$.
   vii) 正. $b \in A$ だから, $\{(b, b)\} \subseteq A^2$.

3.
$$\begin{aligned} R \cup S &= \{(1, a), (3, a), (2, b), (3, b), (1, b)\} \\ R \cap S &= \{(2, b)\} \\ R^c &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\} - R \\ &= \{(1, b), (2, a)\} \end{aligned}$$

4. (1) 定義域 $\{b, c\}$, 値域 $\{b, 2, 3\}$
   (2) $A \times (A \cup B) = \{(b, b), (b, c), (b, 2), (b, 3), (c, b), (c, c), (c, 2), (c, 3)\}$ だから,
$$\begin{aligned} R^c &= A \times (A \cup B) - R \\ &= \{(b, c), (b, 3), (c, b), (c, c)\} \\ R^{-1} &= \{(b, b), (2, b), (2, c), (3, c)\} \end{aligned}$$
   (3)
$$\begin{aligned} (R^c)^{-1} &= \{(c, b), (3, b), (b, c), (c, c)\} \\ (R^{-1})^c &= ((A \cup B) \times A) - R^{-1} \\ &= \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c)\} - R^{-1} \\ &= \{(b, c), (c, b), (c, c), (3, b)\} \end{aligned}$$
   ゆえに, $(R^c)^{-1} = (R^{-1})^c$.

5. $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)\}$

6. (1)
$$\begin{aligned} S \circ R &= \{(1, 2), (1, 4), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 4), (4, 3)\} \\ R \circ S &= \{(3, 4), (3, 1), (1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 3), (2, 1), (1, 3)\} \end{aligned}$$

(2) $R^{-1} = \{(1,1),(1,2),(4,3),(2,2),(3,3),(4,4),(1,4)\}$
$R^{-1} \circ R = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(4,1),(4,2)\}$
$(1,2) \in R^{-1} \circ R$ に対して, $(1,2) \notin I$ だから, $R^{-1} \circ R \neq I$.

(3) $S^{-1} = \{(4,3),(2,1),(4,1),(3,2),(4,2),(3,1)\}$
$S^{-1} \circ S = \{(3,3),(3,1),(3,2),(1,1),(1,3),(1,2),(2,2),(2,1),(2,3)\}$
$(3,1) \in S^{-1} \circ S$ に対して, $(3,1) \notin I$ だから, $S^{-1} \circ S \not\subseteq I$.

7.
$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{P}(B) & = & \{X | X \subseteq B\} \\
 & = & \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{a,b,c\}\} \\
\subseteq & = & \{(X,Y) \in \mathcal{P}(B)^2 | X \subseteq Y\} \\
 & = & \{\ (\phi,\phi), (\phi,\{a\}), (\phi,\{b\}), (\phi,\{c\}), (\phi,\{a,b\}), (\phi,\{b,c\}), (\phi,\{c,a\}), (\phi,\{a,b,c\}), \\
 & & (\{a\},\{a\}), (\{a\},\{a,b\}), (\{a\},\{c,a\}), (\{a\},\{a,b,c\}), \\
 & & (\{b\},\{b\}), (\{b\},\{a,b\}), (\{b\},\{b,c\}), (\{b\},\{a,b,c\}), \\
 & & (\{c\},\{c\}), (\{c\},\{b,c\}), (\{c\},\{c,a\}), (\{c\},\{a,b,c\}), \\
 & & (\{a,b\},\{a,b\}), (\{a,b\},\{a,b,c\}), (\{b,c\},\{b,c\}), (\{b,c\},\{a,b,c\}), \\
 & & (\{c,a\},\{c,a\}), (\{c,a\},\{a,b,c\}), (\{a,b,c\},\{a,b,c\})\ \}
\end{array}
$$

8. (1) 任意の $(x,y) \in A \times (B \cap C)$ に対して, $x \in A$, $y \in B \cap C$. すなわち, $y \in B$ かつ $y \in C$. ゆえに, $(x,y) \in A \times B$ かつ $(x,y) \in A \times C$ だから, $(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. したがって, $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$.
一方, 任意の $(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ に対して, $(x,y) \in A \times B$ かつ $(x,y) \in A \times C$. すなわち, $x \in A$ で, $y \in B$ かつ $y \in C$. ゆえに, $y \in B \cap C$ だから, $(x,y) \in A \times (B \cap C)$. したがって, $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$.
以上から, $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$.

(2) 任意の $(x,y) \in A \times (B \cup C)$ に対して, $x \in A$, $y \in B \cup C$. すなわち, $y \in B$ または $y \in C$. ゆえに, $(x,y) \in A \times B$ または $(x,y) \in A \times C$ だから, $(x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. したがって, $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.
一方, 任意の $(x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ に対して, $(x,y) \in A \times B$ または $(x,y) \in A \times C$. すなわち, $x \in A$ で, $y \in B$ または $y \in C$. ゆえに, $y \in B \cup C$ だから, $(x,y) \in A \times (B \cup C)$. したがって, $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.
以上から, $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$.

9. (1) 任意の $(x,y) \in (R^{-1})^{-1}$ に対して, $(y,x) \in R^{-1}$. ゆえに, $(x,y) \in R$. したがって, $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$.
一方, 任意の $(x,y) \in R$ に対して, $(y,x) \in R^{-1}$. ゆえに, $(x,y) \in (R^{-1})^{-1}$. したがって, $R \subseteq (R^{-1})^{-1}$.
以上から, $(R^{-1})^{-1} = R$.

(2) 任意の $(x,y) \in R^{-1}$ に対して, $(y,x) \in R \subseteq S$. ゆえに, $(x,y) \in S^{-1}$ だから, $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

(3) 任意の $(x,y) \in (R \cup S)^{-1}$ に対して, $(y,x) \in R \cup S$. すなわち, $(y,x) \in R$ または $(y,x) \in S$. ゆえに, $(x,y) \in R^{-1}$ または $(x,y) \in S^{-1}$. したがって, $(x,y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$ だから, $(R \cup S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cup S^{-1}$.
一方, 任意の $(x,y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$ に対して, $(x,y) \in R^{-1}$ または $(x,y) \in S^{-1}$. すなわち, $(y,x) \in R$ または $(y,x) \in S$. ゆえに, $(y,x) \in R \cup S$ だから, $(x,y) \in (R \cup S)^{-1}$. したがって, $R^{-1} \cup S^{-1} \subseteq (R \cup S)^{-1}$.
以上から, $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

(4) 任意の $(x,y) \in (R \cap S)^{-1}$ に対して, $(y,x) \in R \cap S$. すなわち, $(y,x) \in R$ かつ $(y,x) \in S$. ゆえに, $(x,y) \in R^{-1}$ かつ $(x,y) \in S^{-1}$. したがって, $(x,y) \in R^{-1} \cap S^{-1}$ だから, $(R \cap S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cap S^{-1}$.
一方, 任意の $(x,y) \in R^{-1} \cap S^{-1}$ に対して, $(x,y) \in R^{-1}$ かつ $(x,y) \in S^{-1}$. すなわち, $(y,x) \in R$ かつ $(y,x) \in S$. ゆえに, $(y,x) \in R \cap S$ だから, $(x,y) \in (R \cap S)^{-1}$. したがって, $R^{-1} \cap S^{-1} \subseteq (R \cap S)^{-1}$.
以上から, $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

(5) 任意の $(x,y) \in (R - S)^{-1}$ に対して, $(y,x) \in R - S$. すなわち, $(y,x) \in R$ かつ $(y,x) \notin S$. ゆえに, $(x,y) \in R^{-1}$ かつ $(x,y) \notin S^{-1}$. したがって, $(x,y) \in R^{-1} - S^{-1}$ だから, $(R - S)^{-1} \subseteq R^{-1} - S^{-1}$.
一方, 任意の $(x,y) \in R^{-1} - S^{-1}$ に対して, $(x,y) \in R^{-1}$ かつ $(x,y) \notin S^{-1}$. すなわち, $(y,x) \in R$ かつ $(y,x) \notin S$. したがって, $(y,x) \in R - S$ だから, $(x,y) \in (R - S)^{-1}$ であり, $R^{-1} - S^{-1} \subseteq (R - S)^{-1}$.
以上から, $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$.

10. 任意の $(x, y) \in (T \circ S) \circ R$ に対して, ある $z \in B$ が存在して, $(x, z) \in R$ かつ $(z, y) \in T \circ S$. さらに, ある $w \in C$ が存在して, $(z, w) \in S$ かつ $(w, y) \in T$. $(x, z) \in R$, $(z, w) \in S$ だから, $(x, w) \in S \circ R$. さらに, $(w, y) \in T$ だから, $(x, y) \in T \circ (S \circ R)$. したがって, $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$.

一方, 任意の $(x, y) \in T \circ (S \circ R)$ に対して, ある $z \in C$ が存在して, $(x, z) \in S \circ R$ かつ $(z, y) \in T$. さらに, ある $w \in B$ が存在して, $(x, w) \in R$ かつ $(w, z) \in S$. $(w, z) \in S$, $(z, y) \in T$ だから, $(w, y) \in T \circ S$. さらに, $(x, w) \in R$ だから, $(x, y) \in (T \circ S) \circ R$. したがって, $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$.

以上から, $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

離散数学演習 3　解答例

1. (1) 任意の $x \in A$ に対して, $(x,x) \in R$.

   (2) 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \in R$ ならば $(y,x) \in R$.

   (3) 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \in R$ かつ $(y,x) \in R$ ならば $x = y$.

   (4) 任意の $x,y,z \in A$ に対して, $(x,y) \in R$ かつ $(y,z) \in R$ ならば $(x,z) \in R$.

   (5) $\{(x,x) \mid x \in A\}$

   (6) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

   （別解）$\{(x,y) \mid$ ある $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 1)$ に対して，$x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)\}$

   (7) $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$

   （別解）$I_A \cup R^+$

   （別解）$\{(x,y) \mid$ ある $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 0)$ に対して，$x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)\}$

2. R: $(2,2) \notin R$ だから, R は反射的でない.
   $(1,2) \in R$ に対して, $(2,1) \notin R$ だから, R は対称的でない.
   $(1,1),(1,1) \in R$ に対して, $(1,1) \in R$.
   $(1,1),(1,2) \in R$ に対して, $(1,2) \in R$.
   $(1,1),(1,3) \in R$ に対して, $(1,3) \in R$.
   $(1,3),(3,3) \in R$ に対して, $(1,3) \in R$.
   $(3,3),(3,3) \in R$ に対して, $(3,3) \in R$.
   以上から, 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y),(y,z) \in R$ ならば $(x,z) \in R$ だから, R は推移的である.
   $(1,1),(1,1) \in R$ に対して, $1 = 1$.
   $(3,3),(3,3) \in R$ に対して, $3 = 3$.
   以上から, 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y),(y,x) \in R$ ならば $x = y$ だから, R は反対称的である.

   S: $(1,1),(2,2),(3,3) \in S$ だから, S は反射的である.
   $(1,1) \in S$ に対して, $(1,1) \in S$.
   $(1,2) \in S$ に対して, $(2,1) \in S$.
   $(2,1) \in S$ に対して, $(1,2) \in S$.
   $(2,2) \in S$ に対して, $(2,2) \in S$.
   $(3,3) \in S$ に対して, $(3,3) \in S$.
   以上から, 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \in S$ ならば $(y,x) \in S$ だから,S は対称的である.
   $(1,1),(1,1) \in S$ に対して, $(1,1) \in S$.
   $(1,1),(1,2) \in S$ に対して, $(1,2) \in S$.
   $(1,2),(2,1) \in S$ に対して, $(1,1) \in S$.
   $(1,2),(2,2) \in S$ に対して, $(1,2) \in S$.
   $(2,1),(1,1) \in S$ に対して, $(2,1) \in S$.
   $(2,1),(1,2) \in S$ に対して, $(2,2) \in S$.
   $(2,2),(2,1) \in S$ に対して, $(2,1) \in S$.
   $(2,2),(2,2) \in S$ に対して, $(2,2) \in S$.
   $(3,3),(3,3) \in S$ に対して, $(3,3) \in S$.
   以上から, 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y),(y,z) \in S$ ならば $(x,z) \in S$ だから, S は推移的である.
   $(1,2),(2,1) \in S$ に対して, $1 \neq 2$ だから, S は反対称的でない.

   T: $(3,3) \notin T$ だから, T は反射的でない.
   $(1,2) \in T$ に対して, $(2,1) \notin T$ だから, T は対称的でない.
   $(1,2),(2,3) \in T$ に対して, $(1,3) \notin T$ だから, T は推移的でない.
   $(1,1),(1,1) \in T$ に対して, $1 = 1$.
   $(2,2),(2,2) \in T$ に対して, $2 = 2$.

以上から, 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \in T$ かつ $(y,x) \in T$ ならば $x=y$ だから, T は反対称的である.

3. ϕ: ある $x \in A$ に対して, $(x,x) \notin \phi$ である. ゆえに, 任意の $x \in A$ に対して $(x,x) \in \phi$ ではないから, ϕ は反射的でない.
$(x,y) \in \phi$ かつ $(y,x) \notin \phi$ である $x,y \in A$ は存在しない[1]. ゆえに, 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \in \phi$ ならば $(y,x) \in \phi$ だから, ϕ は対称的である.
$(x,y),(y,x) \in \phi$ かつ $x \neq y$ である $x,y \in A$ は存在しない[2]. ゆえに, 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y),(y,x) \in \phi$ ならば $x=y$ だから, ϕ は反対称的である.
$(x,y),(y,z) \in \phi$ かつ $(x,z) \notin \phi$ である $x,y,z \in A$ は存在しない[3]. ゆえに, 任意の $x,y,z \in A$ に対して, $(x,y),(y,x) \in \phi$ ならば, $(x,z) \in \phi$ だから, ϕ は推移的である.
(任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \notin \phi$ だから, ϕ が対称的, 推移的, 反対称的であることはそれぞれ (空虚に) 成り立つ.)

A^2: 任意の $x \in A$ に対して, $(x,x) \in A^2$ だから, A^2 は反射的である.
任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \in A^2$ とすると, $(y,x) \in A^2$ だから, A^2 は対称的である.
$A=\{1,2\}$ のとき, $(1,2),(2,1) \in A^2$ に対して, $1 \neq 2$ だから, A^2 は反対称的でない.
任意の $x,y,z \in A$ に対して, $(x,y),(y,z) \in A^2$ とすると, $(x,z) \in A^2$ だから, A^2 は推移的である.

I_A: 任意の $x \in A$ に対して, $(x,x) \in I_A$ だから, I_A は反射的である.
任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \in I_A$ とすると, $x=y$ だから, $(y,x) \in I_A$. ゆえに, I_A は対称的である.
任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y),(y,x) \in I_A$ とすると, $x=y$ だから, I_A は反対称的である.
任意の $x,y,z \in A$ に対して, $(x,y),(y,z) \in I_A$ とすると, $x=y=z$ だから, $(x,z) \in I_A$. ゆえに, I_A は推移的である.

4. (1) R,S は反射的だから, 任意の $x \in A$ に対して, $(x,x) \in R$, $(x,x) \in S$. ゆえに, $(x,x) \in R \cap S$ だから, $R \cap S$ は反射的である.

(2) 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \in R \cap S$ とする. このとき, $(x,y) \in R$ かつ $(x,y) \in S$. R は対称的だから, $(x,y) \in R$ ならば, $(y,x) \in R$. また, S は対称的だから, $(x,y) \in S$ ならば, $(y,x) \in S$. ゆえに, $(y,x) \in R$ かつ $(y,x) \in S$ だから, $(y,x) \in R \cap S$. したがって, $R \cap S$ は対称的である.

(3) 任意の $x,y,z \in A$ に対して, (x,y),$(y,z) \in R \cap S$ とする. このとき, (x,y),$(y,z) \in R$ かつ (x,y),$(y,z) \in S$. R は推移的だから, (x,y),$(y,z) \in R$ ならば, $(x,z) \in R$. また, S は推移的だから, $(x,y),(y,z) \in S$ ならば, $(x,z) \in S$. ゆえに, $(x,z) \in R$ かつ $(x,z) \in S$ だから, $(x,z) \in R \cap S$. したがって, $R \cap S$ は推移的である.

(4) 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y),(y,x) \in R^{-1}$ とする. このとき, $(y,x),(x,y) \in R$. R は反対称的だから, $x=y$. したがって, R^{-1} は反対称的である.

(5) 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \in R \cup R^{-1}$ とする. このとき, $(x,y) \in R$ または $(x,y) \in R^{-1}$. ゆえに, $(y,x) \in R^{-1}$ または $(y,x) \in R$. すなわち, $(y,x) \in R \cup R^{-1}$. したがって, $R \cup R^{-1}$ は対称的である.

5. 「$\cdots$任意の x,y に対して, xRy ならば yRx である. このとき, xRy, yRx から, $\cdots$」の部分が誤り.
「xRy ならば yRx」が成り立つとしても, このとき「xRy かつ yRx」が成り立つとは限らない.
実際, $A=\{a,b\}$, $R=\{(a,a)\} \subseteq A^2$ とすると, R は対称的かつ推移的であるが, 反射的ではない.

6. (1) R は反射的であるとする. ゆえに, 任意の $x \in A$ に対して, $(x,x) \in R$. $I_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$ だから, $I_A \subseteq R$.
$I_A \subseteq R$ とする. 任意の $x \in A$ に対して, $(x,x) \in I_A \subseteq R$ だから, R は反射的である.

(2) R は対称的であるとする. 任意の $(x,y) \in R^{-1}$ に対して, $(y,x) \in R$. R は対称的だから, $(x,y) \in R$. ゆえに, $R^{-1} \subseteq R$.
$R^{-1} \subseteq R$ とする. また, 任意の $x,y \in A$ に対して, $(x,y) \in R$ とする. このとき, $(y,x) \in R^{-1} \subseteq R$ だから, R は対称的である.

(3) R は推移的であるとする. 任意の $(x,y) \in R^2$ に対して, $R^2 = R \circ R$ だから, ある $z \in A$ に対して, $(x,z) \in R$ かつ $(z,y) \in R$. R は推移的だから, $(x,y) \in R$. ゆえに, $R^2 \subseteq R$.

[1] すなわち, ϕ が対称的であることの定義に対する反例は存在しない.
[2] すなわち, ϕ が反対称的であることの定義に対する反例は存在しない.
[3] すなわち, ϕ が推移的であることの定義に対する反例は存在しない.

$R^2 \subseteq R$ とする. また, 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $(x,y), (y,z) \in R$ とする. このとき, $(x,z) \in R^2 \subseteq R$ だから, R は推移的である.

7. $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ とし, $R \subseteq A^2$ とする.

(1) R が反射的であるためには, $I_A = \{(1,1), (2,2), \cdots, (n,n)\} \subseteq R$ であればよい. ゆえに, $R - I_A$ を定めると, 反射的な関係 R が一つ定まる.
$R - I_A \subseteq A^2 - I_A$ だから, 求める数は $A^2 - I_A$ の部分集合の総数 $|\mathcal{P}(A^2 - I_A)|$ である.
ここで, $I_A \subset A^2$, $|I_A| = n$, $|A^2| = n^2$ だから, $|A^2 - I_A| = |A^2| - |I_A| = n^2 - n$. したがって, $|\mathcal{P}(A^2 - I_A)| = 2^{n^2-n}$.

(2) R が対称的であるためには, $(x,y) \in R$ ならば, $(y,x) \in R$ であればよい. ゆえに, $B = \{(x,y) \in A^2 \mid x \leq y\}$ に対して, $R \subseteq B$ を定めると, R は対称的である.
ゆえに, 求める数は B の部分集合の総数 $|\mathcal{P}(B)|$ である.
ここで, $|B| = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ だから, $|\mathcal{P}(B)| = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

(3) (1), (2) から, $B - I_A = \{(x,y) \in A^2 \mid x < y\}$ に対して, $R \subseteq B$ を定めると, 反射的かつ対称的な関係 $R \cup I_A$ が一つ定まる.
ゆえに, 求める数は $B - I_A$ の部分集合の総数 $|\mathcal{P}(B - I_A)|$ である.
ここで, $|B - I_A| = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ だから, $|\mathcal{P}(B - I_A)| = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

8. (1) 任意の x, y, z に対して, $(x,y), (y,z) \in R^*$ とする. $(x,y) \in R^*$ だから, ある $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 0)$ に対して, $x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$. また, $(y,z) \in R^*$ だから, ある $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_m$ $(m \geq n)$ に対して, $x_n = y, x_m = z, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = n, n+1, \cdots, m-1)$. ゆえに, $x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_m$ に対して, $x_0 = x, x_m = z, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, m-1)$. したがって, $(x,z) \in R^*$ であるから, R^* は推移的である.

(2) R は推移的であるとする.
明らかに, $R \subseteq R^+$.
一方, 任意の x, y に対して, $(x,y) \in R^+$ とする. このとき, ある $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 1)$ に対して, $x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$. $(x_0, x_1), (x_1, x_2) \in R$ で, R は推移的だから, $(x_0, x_2) \in R$. さらに, $(x_0, x_2), (x_2, x_3) \in R$ で, R は推移的だから, $(x_0, x_3) \in R$. 同様に繰り返すと, $(x_0, x_n) \in R$. すなわち, $(x,y) \in R$. ゆえに, $R^+ \subseteq R$.
以上から, $R = R^+$.

(3) R は反射的であるとする. このとき, 任意の x に対して, $(x,x) \in R \subseteq R^+$. ゆえに, R^+ は反射的である.

(4) R は対称的であるとする.
また, 任意の x, y に対して, $(x,y) \in R^*$ とする. このとき, ある $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 0)$ に対して, $x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$. R は対称的だから, $(x_{i+1}, x_i) \in R$ $(i = 0, \cdots, n-1)$. ゆえに, $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0$ に対して, $x_n = y, x_0 = x, (x_{i+1}, x_i) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ であるから, $(y,x) \in R^*$. したがって, R^* は対称的である.

(5) $R \subseteq S$ とする.
また, 任意の x, y に対して, $(x,y) \in R^*$ とする. このとき, ある $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 0)$ に対して, $x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, \cdots, n-1)$. $R \subseteq S$ だから, $(x_i, x_{i+1}) \in S$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$. ゆえに, $x_0, x_1, \cdots, x_n$ に対して, $x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in S$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ であるから, $(x,y) \in S^*$. したがって, $R^* \subseteq S^*$.

(6) $R \subseteq S$, かつ, S は推移的であるとする.
また, 任意の x, y に対して, $(x,y) \in R^+$ とする. このとき, ある $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 1)$ に対して, $x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$. $R \subseteq S$ だから, $(x_i, x_{i+1}) \in S$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$. $(x_0, x_1), (x_1, x_2) \in S$ で, S は推移的だから, $(x_0, x_2) \in S$. さらに, $(x_0, x_2), (x_2, x_3) \in S$ で, S は推移的だから, $(x_0, x_3) \in S$. 同様に繰り返すと, $(x_0, x_n) \in S$. すなわち, $(x,y) \in S$. ゆえに, $R^+ \subseteq S$.

9. (1) n に関する帰納法を用いて示す.
（基底段階）$n = 2$ のとき. このとき $k = 1$ である.

$$\begin{aligned} R^{n-k} \circ R^k &= R^{2-1} \circ R^1 \\ &= R \circ R \\ &= R^2 \\ &= R^n \end{aligned}$$

だから，$n=2$ のとき，命題は成り立つ.
（帰納段階）$n=m$ のときに命題は成り立つと仮定する．$n=m+1$ のときを考え, k に関する帰納法を用いて示す[1]．

i) （基底段階）$k=1$ のとき.

$$\begin{aligned} R^{n-k}\circ R^k &= R^{(m+1)-1}\circ R^1 \\ &= R^m\circ R \\ &= R^{m+1} \\ &= R^n \end{aligned}$$

ii) （帰納段階）$2\leq k\leq n-1=m$ のとき. このとき, $k-1$ に対して命題は成り立つと仮定する.

$$\begin{aligned} R^{n-k}\circ R^k &= R^{(m+1)-k}\circ R^k \\ &= R^{(m+1)-k}\circ(R^{k-1}\circ R^1) \quad (R^k \text{ の定義}) \\ &= R^{m-(k-1)}\circ(R^{k-1}\circ R^1) \\ &= (R^{m-(k-1)}\circ R^{k-1})\circ R^1 \quad \text{（関係の合成に関する結合則）} \\ &= R^m\circ R \quad \text{（}k\text{ に関する帰納法の仮定）} \\ &= R^{m+1} \\ &= R^n \end{aligned}$$

ゆえに, 任意の k に対して, 命題は成り立つ.
以上から，$n=m+1$ のときも命題は成り立つ.
すなわち, 任意の n に対して, 命題は成り立つ.

(2) 任意の $(x,y),(y,z)\in R^+$ に対して，$R^+=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$ だから, $n,m\ (\geq 1)$ が存在して，$(x,y)\in R^n,(y,z)\in R^m$．ゆえに，$(x,z)\in R^m\circ R^n$.
(1) から $R^m\circ R^n=R^{m+n}$ だから，$(x,z)\in R^{m+n}\subseteq R^+$.
ゆえに，R^+ は推移的である.

(3) 任意の $x\in A$ に対して，$(x,x)\in I_A\subseteq R^*$. ゆえに, R^* は反射的である.
任意の $(x,y),(y,z)\in R^*$ に対して, $R^*=I_A\cup R^+$ だから, 次の i)〜iv) の場合が考えられる.

i) $(x,y),(y,z)\in I_A$ のとき.
このとき, $x=y=z$ だから $(x,z)\in I_A\subseteq R^*$. ゆえに, R^* は推移的である.

ii) $(x,y),(y,z)\in R^+$ のとき.
このとき, (2) から R^+ は推移的だから, $(x,z)\in R^+\subseteq R^*$. ゆえに, R^* は推移的である.

iii) $(x,y)\in I_A$, $(y,z)\in R^+$ のとき.
このとき, $x=y$ だから, $(x,z)\in R^+\subseteq R^*$. ゆえに, R^* は推移的である.

iv) $(x,y)\in R^+$, $(y,z)\in I_A$ のとき.
(iii) と同様に, R^* は推移的である.

以上から, R^* は推移的である.

10. 集合 A に対して, $R\subseteq A^2$ とする.

（例）連続的 (serial) ：任意の $x\in A$ に対して, $y\in A$ が存在して, xRy である.
比較可能（comparable）（完全 (total)）：任意の $x,y\in A$ に対して, xRy または yRx である.
非反射的 (irreflexive) ：任意の $x\in A$ に対して, xRx でない.
非対称的 (asymmetric) ：任意の $x,y\in A$ に対して, xRy ならば, yRx でない.
Euclid 的 (Euclidean) ：任意の $x,y,z\in A$ に対して, xRy かつ xRz ならば, yRz である.
合流的 (confluent) ：任意の $x,y,z\in A$ に対して, xRy かつ xRz ならば, $w\in A$ が存在して, yRw かつ zRw である.

11. 略.

[1] 二重帰納法であることに注意せよ．すなわち, n に関する帰納法の中で, k に関する帰納法を用いる.

離散数学演習 4　解答例

1. (1) R は反射的, 対称的, かつ推移的である.

   (2) ある整数 d に対して, $m - n = d \cdot p$.
   （別解）m と n は p で割ったときの余りが等しい.
   （別解）$m - n$ は p の倍数である.

   (3) $\{x \in A \mid (a, x) \in R\}$

   (4) $\{\ [x]_R \mid x \in A\}$

   (5) 次の i)〜iii) を満たす集合のクラス $\pi = \{A_1, \cdots, A_n\}$

   i) 任意の $A_i \in \pi$ に対して, $A_i \neq \phi$.

   ii) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

   iii) 任意の $A_i, A_j \in \pi$ に対して, $A_i \neq A_j$ ならば $A_i \cap A_j = \phi$.

   (6) $\{(x, y) \mid$ ある $A_i \in \pi$に対して, $x, y \in A_i\}$

   (7) π_1, π_2 がそれぞれ定める A 上の同値関係 R_{π_1}, R_{π_2} に対して, $R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_2}$.

2. $(1,1), (2,2), (3,3) \in R$ だから, R は反射的である.
$(1,1) \in R$ に対して, $(1,1) \in R$.
$(1,2) \in R$ に対して, $(2,1) \in R$.
$(2,1) \in R$ に対して, $(1,2) \in R$.
$(2,2) \in R$ に対して, $(2,2) \in R$.
$(3,3) \in R$ に対して, $(3,3) \in R$.
以上から, R は対称的である.
$(1,1), (1,1) \in R$ に対して, $(1,1) \in R$.
$(1,1), (1,2) \in R$ に対して, $(1,2) \in R$.
$(1,2), (2,1) \in R$ に対して, $(1,1) \in R$.
$(1,2), (2,2) \in R$ に対して, $(1,2) \in R$.
$(2,1), (1,1) \in R$ に対して, $(2,1) \in R$.
$(2,1), (1,2) \in R$ に対して, $(2,2) \in R$.
$(2,2), (2,2) \in R$ に対して, $(2,2) \in R$.
$(2,2), (2,1) \in R$ に対して, $(2,1) \in R$.
$(3,3), (3,3) \in R$ に対して, $(3,3) \in R$.
以上から, R は推移的である.
したがって, R は同値関係である.

   $[1]_R = \{1, 2\}$
   $[2]_R = \{1, 2\}$
   $[3]_R = \{3\}$
   $A/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$

3. R は対称的かつ推移的だから, R が反射的であることを示せばよい.
任意の $a \in A$ に対して, ある $b \in A$ が存在して, $(a, b) \in R$ である. このとき, R は対称的だから, $(b, a) \in R$. さらに, $(a, b), (b, a) \in R$ で, R は推移的だから, $(a, a) \in R$. すなわち, R は反射的である.

4. 任意の整数 x に対して, $x - x = 0 \cdot m$ だから, $x \equiv_m x$. すなわち, $\equiv_m$ は反射的である.
任意の整数 x, y に対して, $x \equiv_m y$ とすると, $x - y = k \cdot m$ (k は整数) とおける. このとき, $y - x = -k \cdot m$ ($-k$ は整数) だから, $y \equiv_m x$. すなわち, $\equiv_m$ は対称的である.
任意の整数 x, y, z に対して, $x \equiv_m y, y \equiv_m z$ とすると, $x - y = k_1 \cdot m, y - z = k_2 \cdot m$ (k_1, k_2 は整数) とおける. このとき, $x - z = (k_1 + k_2) \cdot m$ ($k_1 + k_2$ は整数) だから, $x \equiv_m z$. すなわち, $\equiv_m$ は推移的である.
以上から, $\equiv_m$ は同値関係である.

5. $$\begin{aligned} [(2,7)]_\sim &= \{(x, y) \mid y = 5 + x, x, y \in A\} \\ &= \{(1,6), (2,7), (3,8), (4,9), (5,10), (6,11), (7,12), (8,13), (9,14), (10,15)\} \end{aligned}$$

6. 任意の $(a,b) \in \mathbf{N}^2$ に対して, $ab = ba$ だから, $(a,b) \simeq (a,b)$. すなわち, $\simeq$ は反射的である.
任意の $(a,b),(c,d) \in \mathbf{N}^2$ に対して, $(a,b) \simeq (c,d)$ とすると, $ad = bc$. このとき, $cb = da$ だから, $(c,d) \simeq (a,b)$. すなわち, $\simeq$ は対称的である.
任意の $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbf{N}^2$ に対して, $(a,b) \simeq (c,d),(c,d) \simeq (e,f)$ とすると, $ad = bc, cf = de$. このとき, $adcf = bcde$ だから, $af = be$ であり, $(a,b) \simeq (e,f)$. すなわち, $\simeq$ は推移的である.
以上から, $\simeq$ は同値関係である.

7.
- 直和分割
$\pi_1 = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$
$\pi_2 = \{\{a,b\},\{c\}\}$
$\pi_3 = \{\{a,c\},\{b\}\}$
$\pi_4 = \{\{b,c\},\{a\}\}$
$\pi_5 = \{\{a,b,c\}\}$
- 同値関係
$R_{\pi_1} = (\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b\} \times \{b\}) \cup (\{c\} \times \{c\}) = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$
$R_{\pi_2} = (\{a,b\} \times \{a,b\}) \cup (\{c\} \times \{c\}) = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$
$R_{\pi_3} = (\{a,c\} \times \{a,c\}) \cup (\{b\} \times \{b\}) = \{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c)\}$
$R_{\pi_4} = (\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b,c\} \times \{b,c\}) = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$
$R_{\pi_5} = \{a,b,c\} \times \{a,b,c\} = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$
- 任意の R_{π_i} $(i = 1,2,3,4,5)$ に対して, $R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_i}$ だから, 最も細かい分割は π_1 である.
任意の R_{π_i} $(i = 1,2,3,4,5)$ に対して, $R_{\pi_i} \subseteq R_{\pi_5}$ だから, 最も粗い分割は π_5 である.

8. $\{\{1\},\{2,3,4\}\}$
$\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$
$\{\{1\},\{3\},\{2,4\}\}$
$\{\{1\},\{4\},\{2,3\}\}$
$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

9. (1) $\displaystyle\bigcup_{X \in \pi} X^2 = (\{a,c\} \times \{a,c\}) \cup (\{b\} \times \{b\}) = \{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c),(b,b)\}$.
(2) $R = \displaystyle\bigcup_{X \in \pi} X^2$ だから, (1) より, $[a]_R = \{x \mid (a,x) \in R\} = \{a,c\}$.
(3) $\pi_{\max} = \{\{a,b,c\}\}$.
$\pi_{\min} = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$.
(4) $$\begin{aligned} R_{\max} &= \bigcup_{X \in \pi_{\max}} X^2 = (\{a,b,c\} \times \{a,b,c\}) \\ &= \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}. \\ R_{\min} &= \bigcup_{X \in \pi_{\min}} X^2 = (\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b\} \times \{b\}) \cup (\{c\} \times \{c\}) \\ &= \{(a,a),(b,b),(c,c)\}. \end{aligned}$$

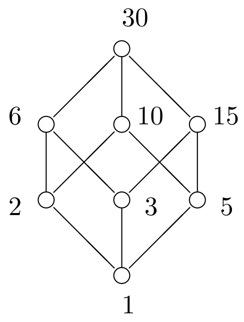
10. $R \circ S$ は同値関係であるとする.
任意の $(x,y) \in R \circ S$ に対して, $R \circ S$ は対称的だから, $(y,x) \in R \circ S$. ゆえに, ある $z \in A$ が存在して, $(y,z) \in S$, $(z,x) \in R$. R,S は対称的だから, $(z,y) \in S$, $(x,z) \in R$. ゆえに, $(x,y) \in S \circ R$.
したがって, $R \circ S \subseteq S \circ R$.
一方, 任意の $(x,y) \in S \circ R$ に対して, ある $z \in A$ が存在して, $(x,z) \in R$, $(z,y) \in S$. R,S は対称的だから, $(z,x) \in R$, $(y,z) \in S$. ゆえに, $(y,x) \in R \circ S$. $R \circ S$ は対称的だから, $(x,y) \in R \circ S$. したがって, $S \circ R \subseteq R \circ S$.
以上から, $R \circ S = S \circ R$.

離散数学演習 5　解答例

1. (1) R は反射的，反対称的，かつ推移的である．
   (2) $(x, y) \in R$ または $(y, x) \in R$.
   (3) R は A 上の半順序であり, かつ, 任意の $x, y \in A$ に対して, x と y は比較可能である.
   (4) $a \leq x$ かつ $a \neq x$ となる $x \in B$ は存在しない.
   (5) $x \leq a$ かつ $a \neq x$ となる $x \in B$ は存在しない.
   (6) 任意の $x \in B$ に対して, $x \leq a$.
   (7) 任意の $x \in B$ に対して, $a \leq x$.
   (8) 任意の $x \in B$ に対して, $x \leq a$.
   (9) a は B の上界であり, かつ, B の任意の上界 x に対して, $a \leq x$.
   (10) 任意の $x \in B$ に対して, $a \leq x$.
   (11) a は B の下界であり, かつ, B の任意の下界 x に対して, $x \leq a$.
2. (1) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5),(1,6),(1,10),(1,15),(1,30),\ (2,2),(2,6),(2,10),(2,30),$
   $(3,3),(3,6),(3,15),(3,30),\ (5,5),(5,10),(5,15),(5,30),(6,6),(6,30),\ (10,10),(10,30),$
   $(15,15),(15,30),(30,30)\}$
   (2) $(1,1),(2,2),(3,3),(5,5),(6,6),(10,10),(15,15),\ (30,30) \in R$ だから, R は反射的である.
   $(1,2) \in R$ に対して, $(2,1) \notin R$.
   $(1,3) \in R$ に対して, $(3,1) \notin R$.
   $(1,5) \in R$ に対して, $(5,1) \notin R$.
   $(1,6) \in R$ に対して, $(6,1) \notin R$.
   $(1,10) \in R$ に対して, $(10,1) \notin R$.
   $(1,15) \in R$ に対して, $(15,1) \notin R$.
   $(1,30) \in R$ に対して, $(30,1) \notin R$.
   $(2,6) \in R$ に対して, $(6,2) \notin R$.
   $(2,10) \in R$ に対して, $(10,2) \notin R$.
   $(2,30) \in R$ に対して, $(30,2) \notin R$.
   $(3,6) \in R$ に対して, $(6,3) \notin R$.
   $(3,15) \in R$ に対して, $(15,3) \notin R$.
   $(3,30) \in R$ に対して, $(30,3) \notin R$.
   $(5,10) \in R$ に対して, $(10,5) \notin R$.
   $(5,15) \in R$ に対して, $(15,5) \notin R$.
   $(5,30) \in R$ に対して, $(30,5) \notin R$.
   $(6,30) \in R$ に対して, $(30,6) \notin R$.
   $(10,30) \in R$ に対して, $(30,10) \notin R$.
   $(15,30) \in R$ に対して, $(30,15) \notin R$.
   以上から, R は反対称的である.
   $(1,1),(1,1) \in R$ に対して, $(1,1) \in R$.
   $(1,1),(1,2) \in R$ に対して, $(1,2) \in R$.
   $(1,1),(1,3) \in R$ に対して, $(1,3) \in R$.
   $(1,1),(1,5) \in R$ に対して, $(1,5) \in R$.
   $(1,1),(1,6) \in R$ に対して, $(1,6) \in R$.
   $(1,1),(1,10) \in R$ に対して, $(1,10) \in R$.
   $(1,2),(2,2) \in R$ に対して, $(1,2) \in R$.
   $(1,2),(2,6) \in R$ に対して, $(1,6) \in R$.
   $(1,2),(2,10) \in R$ に対して, $(1,10) \in R$.
   $(1,2),(2,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
   $(1,3),(3,3) \in R$ に対して, $(1,3) \in R$.
   $(1,3),(3,6) \in R$ に対して, $(1,6) \in R$.
   $(1,3),(3,15) \in R$ に対して, $(1,15) \in R$.
   $(1,3),(3,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
   $(1,5),(5,5) \in R$ に対して, $(1,5) \in R$.
   $(1,5),(5,10) \in R$ に対して, $(1,10) \in R$.

$(1,5),(5,15) \in R$ に対して, $(1,15) \in R$.
$(1,5),(5,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
$(1,6),(6,6) \in R$ に対して, $(1,6) \in R$.
$(1,6),(6,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
$(1,10),(10,10) \in R$ に対して, $(1,10) \in R$.
$(1,10),(10,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
$(1,15),(15,15) \in R$ に対して, $(1,15) \in R$.
$(1,15),(15,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
$(1,30),(30,30) \in R$ に対して, $(1,30) \in R$.
$(2,2),(2,2) \in R$ に対して, $(2,2) \in R$.
$(2,2),(2,6) \in R$ に対して, $(2,6) \in R$.
$(2,2),(2,10) \in R$ に対して, $(2,10) \in R$.
$(2,2),(2,30) \in R$ に対して, $(2,30) \in R$.
$(2,6),(6,6) \in R$ に対して, $(2,6) \in R$.
$(2,6),(6,30) \in R$ に対して, $(2,30) \in R$.
$(2,10),(10,10) \in R$ に対して, $(2,10) \in R$.
$(2,10),(10,30) \in R$ に対して, $(2,30) \in R$.
$(2,30),(30,30) \in R$ に対して, $(2,30) \in R$.
$(3,3),(3,3) \in R$ に対して, $(3,3) \in R$.
$(3,3),(3,6) \in R$ に対して, $(3,6) \in R$.
$(3,3),(3,15) \in R$ に対して, $(3,15) \in R$.
$(3,3),(3,30) \in R$ に対して, $(3,30) \in R$.
$(3,6),(6,6) \in R$ に対して, $(3,6) \in R$.
$(3,6),(6,30) \in R$ に対して, $(3,30) \in R$.
$(3,10),(10,10) \in R$ に対して, $(3,10) \in R$.
$(3,10),(10,30) \in R$ に対して, $(3,30) \in R$.
$(3,15),(15,15) \in R$ に対して, $(3,15) \in R$.
$(3,15),(15,30) \in R$ に対して, $(3,30) \in R$.
$(3,30),(30,30) \in R$ に対して, $(3,30) \in R$.
$(5,5),(5,5) \in R$ に対して, $(5,5) \in R$.
$(5,5),(5,10) \in R$ に対して, $(5,10) \in R$.
$(5,5),(5,15) \in R$ に対して, $(5,15) \in R$.
$(5,5),(5,30) \in R$ に対して, $(5,30) \in R$.
$(5,10),(10,10) \in R$ に対して, $(5,10) \in R$.
$(5,10),(10,30) \in R$ に対して, $(5,30) \in R$.
$(5,15),(15,15) \in R$ に対して, $(5,15) \in R$.
$(5,15),(15,30) \in R$ に対して, $(5,30) \in R$.
$(5,30),(30,30) \in R$ に対して, $(5,30) \in R$.
$(6,6),(6,6) \in R$ に対して, $(6,6) \in R$.
$(6,6),(6,30) \in R$ に対して, $(6,30) \in R$.
$(6,30),(30,30) \in R$ に対して, $(6,30) \in R$.
$(10,10),(10,10) \in R$ に対して, $(10,10) \in R$.
$(10,30),(30,30) \in R$ に対して, $(10,30) \in R$.
$(15,15),(15,15) \in R$ に対して, $(15,15) \in R$.
$(15,15),(15,30) \in R$ に対して, $(15,30) \in R$.
$(15,30),(30,30) \in R$ に対して, $(15,30) \in R$.
$(30,30),(30,30) \in R$ に対して, $(30,30) \in R$.
以上から, R は推移的である.

(3)



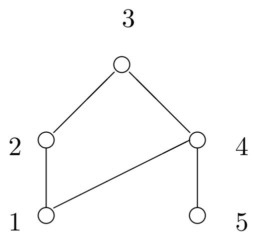
(4) $30Rx, x \neq 30$ となる $x \in A$ は存在しないから, A の極大元は 30 である.
$xR1, x \neq 1$ となる $x \in A$ は存在しないから, A の極小元は 1 である.
$1R30, 2R30, 3R30, 5R30, 6R30, 10R30, 15R30, 30R30$ だから, A の最大元は 30 である.
$1R1, 1R2, 1R3, 1R5, 1R6, 1R10, 1R15, 1R30$ だから, A の最小元は 1 である.

(5) $(2,3) \notin R$, $(3,2) \notin R$ だから, 2 と 3 は比較可能ではない. ゆえに, R は全順序ではない.

3. (1) $R = \{(3,3),(3,2),(3,1),(3,4),(3,5), (2,2),(2,1),(1,1),(4,4),(4,1), (4,5),(5,5)\}$

(2) $1 \leq x, x \neq 1$ となる $x \in A$ は存在しない.
$5 \leq x, x \neq 5$ となる $x \in A$ は存在しない.
ゆえに, A の極大元は 1, 5 である.
$x \leq 3, x \neq 3$ となる $x \in A$ は存在しない.
ゆえに, A の極小元は 3 である.

(3)



4. （図略）
$\mathcal{P}(A)$=$\{\phi$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,b,c,d\}$ $\}$

5. 任意の $x \in Z$ に対して, $x = x^1$ だから, $(x,x) \in R$. すなわち, R は反射的である.
任意の $x, y \in Z$ に対して, $(x,y),(y,x) \in R$ とすると, 正の整数 r_1, r_2 が存在して, $y = x^{r_1}$, $x = y^{r_2}$. このとき, $x = (x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2}$ だから, $r_1 r_2 = 1$. $r_1 r_2$ は正の整数だから, $r_1 = r_2 = 1$. ゆえに, $x = y$ だから, R は反対称的である.
任意の $x, y, z \in Z$ に対して, $(x,y),(y,z) \in R$ とすると, 正の整数 r_1, r_2 が存在して, $y = x^{r_1}$, $z = y^{r_2}$. このとき, $z = x^{r_1 r_2}$. $r_1 r_2$ は正の整数だから, $(x,z) \in R$. すなわち, R は推移的である.
以上から, R は半順序である.
（反対称性に関する別証明）任意の $x, y \in Z (x \neq y)$ に対して, $(x,y) \in R$ とすると, 正の整数 r が存在して, $y = x^r$ $(r \neq 1)$. このとき, $x = y^{\frac{1}{r}}$. $\dfrac{1}{r}$ は正の整数でないので, $(y,x) \notin R$. すなわち, R は反対称的である.

6. B の最大元は唯一でないと仮定する. そこで, 最大元が 2 つあるとして, それらを $b_1, b_2 \in B$ とする. このとき, b_1 は最大元だから, $(b_2, b_1) \in R$. また, b_2 は最大元だから, $(b_1, b_2) \in R$. R は反対称的だから, $b_1 = b_2$. すなわち, B の最大元は唯一である.
最小元の唯一性も同様に示せる.

7. $a \neq b$ とする.
   $\leq$ は全順序だから, $a \leq b$ または $b \leq a$.
   $a \leq b$ のとき, b が極小元であることに矛盾する. $b \leq a$ のとき, a が極小元であることに矛盾する.
   ゆえに, $a = b$.

8. $2R1, 3R1, 4R1$.
   $2R2, 3R2, 4R2$.
   ゆえに, B の上界は 1, 2 である.
   $5R2, 5R3, 5R4$.
   $6R2, 6R3, 6R4$.
   ゆえに, B の下界は 5, 6 である.
   B の上界 1, 2 に対して, $2R1, 2R2$ だから, B の上限は 2 である.
   B の下界 5, 6 に対して, $5Rx, 6Rx$ となる $x \in \{5, 6\}$ は存在しないので, B の下限は存在しない.

9. B: $3R1, 5R1$.
   $3R2, 5R2$.
   $3R3, 5R3$.
   ゆえに, B の上界は 1,2,3 である.
   $5R3, 5R5$.
   $6R3, 6R5$.
   $7R3, 7R5$.
   $8R3, 7R5$.
   ゆえに, B の下界は 5,6,7,8 である.
   B の上界 1,2,3 に対して, $3R1, 3R2, 3R3$ だから, B の上限は 3 である.
   B の下界 5,6,7,8 に対して, $5R5, 6R5, 6R5, 8R5$ だから, B の下限は 5 である.

   C: $6R1, 8R1$.
   $6R2, 8R2$.
   $6R3, 8R3$.
   $6R4, 8R4$.
   $6R5, 8R5$.
   $6R6, 8R6$.
   ゆえに, C の上界は 1,2,3,4,5,6 である.
   $6R8, 8R8$.
   ゆえに, C の下界は 8 である.
   C の上界 1,2,3,4,5,6 に対して, $6R1, 6R2, 6R3, 6R4, 6R5, 6R6$ だから, C の上限は 6 である.
   C の下界 8 に対して, $8R8$ だから, C の下限は 8 である.

   D: $2R2, 3R2, 6R2$
   ゆえに, D の上界は 2 である.
   $6R2, 6R3, 6R6$.
   $8R2, 8R3, 8R6$.
   ゆえに, D の下界は 6,8 である.
   D の上界 2 に対して, $2R2$ だから, D の上限は 2 である.
   D の下界 6,8 に対して, $6R6, 8R6$ だから, D の下限は 6 である.

   E: $4R1, 5R1, 6R1$.
   $4R2, 5R2, 6R2$.
   $4R3, 5R3, 6R3$.
   ゆえに, E の上界は 1,2,3 である.
   $6R4, 6R5, 6R6$.
   $8R4, 8R5, 8R6$.
   ゆえに, E の下界は 6,8 である.
   E の上界 1,2,3 に対して, $3R1, 3R2, 3R3$ だから, E の上限は 3 である.
   E の下界 6,8 に対して, $6R6, 8R6$ だから, E の下限は 6 である.

   F: $4R1, 5R1, 7R1$.
   $4R2, 5R2, 7R2$.
   $4R3, 5R3, 7R3$.
   ゆえに, F の上界は 1,2,3 である.
   $8R4, 8R5, 8R7$

ゆえに, F の下界は 8 である.
F の上界 1,2,3 に対して, $3R1, 3R2, 3R3$ だから, F の上限は 3 である.
F の下界 8 に対して, $8R8$ だから, F の下限は 8 である.

G: $1Rx, 2Rx, 4Rx, 7Rx$ となる $x \in A$ は存在しないから, G の上界は存在しない.
$8R1, 8R2, 8R4, 8R7$.
ゆえに, G の下界は 8 である.
G の上界は存在しないから, G の上限も存在しない.
G の下界 8 に対して, $8R8$ だから, G の下限は 8 である.

10. 任意の $(a,b) \in M^2$ に対して, a で割り切れる $c \in M$ $(a \neq c)$ と b 以上である $d \in M$ $(b \neq d)$ は必ず存在する. ゆえに, $(a,b) \leq (c,d), (a,b) \neq (c,d)$ となる $(c,d) \in M^2$ は必ず存在する. ゆえに, M^2 の極大元は存在しない.
また, $(a,b) \in M^2$ に対して, $(a,b) \leq (p,2)$ (ただし, p は素数) であるとき, $a = p$ かつ $b = 2$. ゆえに, $(a,b) \leq (p,2), (a,b) \neq (p,2)$ となる $(a,b) \in M^2$ は存在しない. ゆえに, $(p,2)$ は M^2 の極小元である.

11. (1) R は反射的だから, 任意の $x \in A$ に対して, xRx. このとき, $x \equiv x$ だから, $\equiv$ は反射的である.
任意の $x, y \in A$ に対して, $x \equiv y$ とする. このとき, xRy かつ yRx だから, yRx かつ xRy. ゆえに, $y \equiv x$. したがって, $\equiv$ は対称的である.
任意の $x, y, z \in A$ に対して, $x \equiv y$, $y \equiv z$ とする. このとき, xRy かつ yRx, yRz かつ zRy. R は推移的だから, xRz かつ zRx. ゆえに, $x \equiv z$. したがって, $\equiv$ は推移的である.
以上から, $\equiv$ は同値関係である.

(2) 任意の $[x]_\equiv \in A/\equiv$ に対して, $x \in A$. R は反射的だから, xRx. ゆえに, $[x]_\equiv \leq [x]_\equiv$ だから, $\leq$ は反射的である.
任意の $[x]_\equiv, [y]_\equiv \in A/\equiv$ に対して, $[x]_\equiv \leq [y]_\equiv$ かつ $[y]_\equiv \leq [x]_\equiv$ とする. このとき, xRy かつ yRx だから, $x \equiv y$. ゆえに, $[x]_\equiv = [y]_\equiv$ だから, $\leq$ は反対称的である.
任意の $[x]_\equiv, [y]_\equiv, [z]_\equiv \in A/\equiv$ に対して, $[x]_\equiv \leq [y]_\equiv$ かつ $[y]_\equiv \leq [z]_\equiv$ とする. このとき, xRy かつ yRz. R は推移的だから, xRz. ゆえに, $[x]_\equiv \leq [z]_\equiv$ だから, $\leq$ は推移的である.
以上から, $\leq$ は半順序である.

12. (1) S が $\mathcal{A}$ の上界であることと, (2) $\mathcal{A}$ の任意の上界 B に対して, $S \subseteq B$ であること（最小上界であること）を示せばよい.
(1) 任意の $X \in \mathcal{A}$ に対して, 明らかに $X \subseteq \displaystyle\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X = S$. ゆえに, S は $\mathcal{A}$ の上界である.
(2) 任意の $x \in A$ に対して, $x \in S = \displaystyle\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$ とする. このとき, ある $X \in \mathcal{A}$ が存在して, $x \in X$. ここで, B を $\mathcal{A}$ の任意の上界とすると, $X \subseteq B$. ゆえに, $x \in B$. すなわち, $S \subseteq B$.

離散数学演習 6　解答例

1. (1) A の任意の部分集合 B に対して, B の上限と下限が存在する.

   (2) L の任意の有限部分集合 B に対して, B の上限と下限が存在する.

   (3) $\{a,b\}$ の上限

   (4) $\{a,b\}$ の下限

2. (1)

$+$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	3
4	1	1	1	4	4	4	4
5	1	2	1	4	5	4	5
6	1	1	3	4	4	6	6
7	1	2	3	4	5	6	7

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	2	7	5	5	7	7
3	3	7	3	6	7	6	7
4	4	5	6	4	5	6	7
5	5	5	7	5	5	7	7
6	6	7	6	6	7	6	7
7	7	7	7	7	7	7	7

上表から, 任意の 2 つの要素に対して上限と下限が存在するので, 与えられた半順序集合は束である.

   (2)

$+$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
5	1	2	3	2	5	5
6	1	2	3	4	5	6

$\cdot$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	5	4	5	6
3	3	5	3	6	5	6
4	4	4	6	4	6	6
5	5	5	5	6	5	6
6	6	6	6	6	6	6

上表から, 任意の 2 つの要素に対して上限と下限が存在するので, 与えられた半順序集合は束である.

3. (1) $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ だから，$X \cup Y \in \mathcal{P}(A)$．また，$X \subseteq X \cup Y$，$Y \subseteq X \cup Y$ だから，$X \cup Y$ は $\{X, Y\}$ の上界である．
   $\{X, Y\}$ の任意の上界を Z とすると，$X \subseteq Z$，$Y \subseteq Z$．このとき，$X \cup Y \subseteq Z$．すなわち，$X \cup Y$ は $\{X, Y\}$ の最小上界，すなわち上限である．
   一方，$X, Y \in \mathcal{P}(A)$ だから，$X \cap Y \in \mathcal{P}(A)$．また，$X \cap Y \subseteq X$，$X \cap Y \subseteq Y$ だから，$X \cap Y$ は $\{X, Y\}$ の下界である．
   $\{X, Y\}$ の任意の下界を Z とすると，$Z \subseteq X$，$Z \subseteq Y$．このとき，$Z \subseteq X \cap Y$．すなわち，$X \cap Y$ は $\{X, Y\}$ の最大下界，すなわち下限である．

   (2) (1) から，任意の $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ に対して，$\sup\{X, Y\}$ と $\inf\{X, Y\}$ が存在するので，$(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ は束である．

4. (1) $b + c$ は $\{a, c\}$ の上界であることを示す.
   明らかに, $b \leq b + c$. $a \leq b$ で, $\leq$ は推移的であるから, $a \leq b + c$.
   一方, 明らかに, $c \leq b + c$.
   ゆえに, $b + c$ は $\{a, c\}$ の上界である.
   ところが, $a + c$ は $\{a, c\}$ の上限であるから, $a + c \leq b + c$.
   同様に, $a \cdot c \leq b \cdot c$ を示すことができる.

   (2) $b + d$ は $\{a, c\}$ の上界であることを示す.
   明らかに, $b \leq b + d$, $d \leq b + d$. $a \leq b$ で, $\leq$ は推移的であるから, $a \leq b + d$. また, $c \leq d$ で, $\leq$ は推移的であるから, $c \leq b + d$. ゆえに, $b + d$ は $\{a, c\}$ の上界である.
   ところが, $a + c$ は $\{a, c\}$ の上限だから, $a + c \leq b + d$.
   同様に, $a \cdot c \leq b \cdot d$ を示すことができる.

   (3) $(a \cdot b) + c$ は $\{a, b + c\}$ の下界であることを示す.
   明らかに, $a \cdot b \leq a$. また, $c \leq a$ だから, a は $\{a \cdot b, c\}$ の上界であり, $(a \cdot b) + c \leq a$.
   一方, 明らかに, $c \leq b + c$. また, $a \cdot b \leq b \leq b + c$. ゆえに, $b + c$ は $\{a \cdot b, c\}$ の上界であり, $(a \cdot b) + c \leq b + c$.
   以上から, $(a \cdot b) + c$ は $\{a, b + c\}$ の下界である.
   ところが, $a \cdot (b + c)$ は $\{a, b + c\}$ の下限であるから, $(a \cdot b) + c \leq a \cdot (b + c)$.

(4) $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ は $\{a, b + c\}$ の下界であることを示す.
明らかに, $a \cdot b \leq a, a \cdot c \leq a$. ゆえに, a は $\{a \cdot b, a \cdot c\}$ の上界であり, $(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq a$.
一方, $a \cdot b \leq b \leq b + c$, $a \cdot c \leq c \leq b + c$. ゆえに, $b + c$ は $\{a \cdot b, a \cdot c\}$ の上界であり, $(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq b + c$.
以上から, $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ は $\{a, b + c\}$ の下界である.
ところが, $a \cdot (b + c)$ は $\{a, b + c\}$ の下限であるから, $(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq a \cdot (b + c)$.

(5) $a + (b \cdot c)$ は $\{a + b, a + c\}$ の下界であることを示す.
明らかに, $a \leq a + b$. また, $b \cdot c \leq b \leq a + b$. ゆえに, $a + b$ は $\{a, b \cdot c\}$ の上界であり, $a + (b \cdot c) \leq a + b$.
一方, 明らかに, $a \leq a + c$. また, $b \cdot c \leq c \leq a + c$. ゆえに, $a + c$ は $\{a, b \cdot c\}$ の上界であり, $a + (b \cdot c) \leq a + c$.
以上から, $a + (b \cdot c)$ は $\{a + b, a + c\}$ の下界である.
ところが, $(a + b) \cdot (a + c)$ は $\{a + b, a + c\}$ の下限であるから, $a + (b \cdot c) \leq (a + b) \cdot (a + c)$.

5. (1) $a + (b + c) = u$ とおく.
まず, u が $\{a + b, c\}$ の上界であることを示す.
u は $\{a, b + c\}$ の上限だから, $a \leq u, b + c \leq u$. $b + c \leq u$ だから, $b \leq u, c \leq u$. ゆえに, u は $\{a, b\}$ の上界であり, $a + b \leq u$. したがって, u は $\{a + b, c\}$ の上界でもある.
次に, u が $\{a + b, c\}$ の上限であることを示す.
そこで, u' を $\{a + b, c\}$ の任意の上界とする. このとき, $a \leq u', b \leq u', c \leq u'$. ゆえに, u' は $\{b, c\}$ の上界であり, $b + c \leq u'$. したがって, u' は $\{a, b + c\}$ の上界でもある. ところが, u は $\{a, b + c\}$ の上限だから, $u \leq u'$. ゆえに, u は $\{a + b, c\}$ の最小上界, すなわち, 上限であり, $u = (a + b) + c$. 結局, $a + (b + c) = (a + b) + c$.
同様に, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ も示すことができる.

(2) 明らかに, $a \cdot b \leq a$. このとき, $(a \cdot b) + a = a$. ゆえに, $a + (a \cdot b) = a$.
また, 明らかに, $a \leq a + b$. このとき, $a \cdot (a + b) = a$.

(3) $+, \cdot$ の定義から明らか.

6. (2) が成り立つとする. このとき,

$$
\begin{array}{lcll}
a + a & = & a + (a \cdot (a + b)) & (\text{吸収則}) \\
 & = & a & (\text{吸収則}) \\
a \cdot a & = & a \cdot (a + (a \cdot b)) & (\text{吸収則}) \\
 & = & a & (\text{吸収則})
\end{array}
$$

となるから, (3) が成り立つ.

7. (1) が成り立つとする. このとき,

$$
\begin{array}{lcll}
(a + b) \cdot (a + c) & = & ((a + b) \cdot a) + ((a + b) \cdot c)) & ((1)) \\
 & = & (a \cdot (a + b)) + ((a + b) \cdot c)) & (\text{交換則}) \\
 & = & a + ((a + b) \cdot c)) & (\text{吸収則}) \\
 & = & a + (c \cdot (a + b)) & (\text{交換則}) \\
 & = & a + ((c \cdot a) + (c \cdot b)) & ((1)) \\
 & = & a + ((a \cdot c) + (b \cdot c)) & (\text{交換則}) \\
 & = & (a + (a \cdot c)) + (b \cdot c) & (\text{結合則}) \\
 & = & a + (b \cdot c) & (\text{吸収則})
\end{array}
$$

となるから, (2) が成り立つ.
同様に, (2) が成り立つならば, (1) が成り立つことを示せる.
ゆえに, (1) と (2) は互いに同値である.

離散数学演習 7　解答例

1. (1) $f \subseteq A \times B$, かつ, 任意の $x \in A$ に対して, $y \in B$ が唯一存在して, $(x, y) \in f$.
   (2) $(a, b) \in f$ であるような $b \in B$
   (3) $b = f(a)$ であるような $a \in A$
   (4) $\{f(x) \mid x \in X\}$
   (5) $\{x \mid f(x) \in Y\}$
   (6) $\{x \in A \mid$ ある $y \in B$ に対して, $y = f(x)\}$
   (7) $\{y \in B \mid$ ある $x \in A$ に対して, $y = f(x)\}$
   （別解）$\{f(x) \mid x \in A\}$, $f(A)$
   (8) 任意の $y \in B$ に対して, ある $x \in A$ が存在して, $y = f(x)$.
   (9) 任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して, $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$.
   （別解）任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$.
   (10) f は全射かつ単射である.
   (11) f は有限集合上の全単射である.
   (12) 任意の $x \in A$ に対して, $I_A(x) = x$.
   (13) 任意の $x \in A$ に対して, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
   (14) $g \circ f = I_A$ かつ $f \circ g = I_B$.
   (15) $\{f \mid f : A \to B\}$
   (16) $f : A \to \{0, 1\}$

2. $(2, 3), (2, 1) \in R$ であり, $(2, x) \in R$ となる $x \in A$ は唯一でないから, R は関数ではない.
   $(2, y) \in S$ となる $y \in A$ が存在しないので, S は関数ではない.
   任意の $x \in A$ に対して, $(x, y) \in T$ となる $y \in A$ が唯一存在するので, T は関数である.

3. (1) (a) $f \circ g = \{(a, a), (b, d), (c, b), (d, a)\}$ [1]
   (b) $h \circ f = \{(a, c), (b, a), (c, a), (d, c)\}$
   (c) $g \circ g = \{(a, d), (b, c), (c, b), (d, a)\}$
   (2) $a \in A$ に対して, $(a, c), (a, b) \in f^{-1}$ だから, f^{-1} は関数ではない.
   $g^{-1} = \{(b, a), (d, b), (a, c), (c, d)\}$ であり, 任意の $x \in A$ に対して, $(x, y) \in g^{-1}$ となる $y \in A$ は唯一である．ゆえに, g^{-1} は関数である.
   $x \in A$ に対して, $(c, b), (c, d) \in h^{-1}$ だから, h^{-1} は関数ではない.
   (3) $b, c \in A$ に対して, $f(b) = f(c)$ だから, f は単射ではない.
   $A = \{a, b, c, d\}$ であって, $g(a), g(b), g(c), g(d)$ は互いに異なるから, g は単射である.
   $a, c \in A$ に対して, $h(a) = h(c)$ だから, h は単射ではない.
   $(x, c) \in f$ となる $x \in A$ は存在しないから, f は全射ではない.
   任意の $y \in A$ に対して, $(x, y) \in g$ となる $x \in A$ が存在するから, g は全射である.
   $(x, b) \in h$ となる $x \in A$ は存在しないから, h は全射ではない.

4. $B^A = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$．ただし,

$f_1 = \{(a, 1), (b, 1)\}$,	$f_4 = \{(a, 2), (b, 1)\}$,	$f_7 = \{(a, 3), (b, 1)\}$,
$f_2 = \{(a, 1), (b, 2)\}$,	$f_5 = \{(a, 2), (b, 2)\}$,	$f_8 = \{(a, 3), (b, 2)\}$,
$f_3 = \{(a, 1), (b, 3)\}$,	$f_6 = \{(a, 2), (b, 3)\}$,	$f_9 = \{(a, 3), (b, 3)\}$.

5. 任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ とする．このとき, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$．$g(f(x_1)) = (g \circ f)(x_1) = I_A(x_1) = x_1$, $g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = I_A(x_2) = x_2$ だから, $x_1 = x_2$．ゆえに, f は単射である.
   一方, 任意の $x \in A$ に対して, $g(f(x)) = (g \circ f)(y) = I_A(y) = y$．$f(x) = y$ とおくと, $y \in B$ であり, $g(y) = x$．ゆえに, g は全射である.

[1] $f \circ g = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & a \end{bmatrix}$ などと書いてもよい.

6. (1) g は全射だから, 任意の $z \in C$ に対して, ある $y \in B$ が存在して, $g(y) = z$. また, f は全射だから, $y \in B$ に対して, ある $x \in A$ が存在して, $f(x) = y$. すなわち, 任意の $z \in C$ に対して, ある $x \in A$ が存在して, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$ だから, $g \circ f$ は全射である.

(2) 任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ とする. このとき, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. g は単射だから, $f(x_1) = f(x_2)$. さらに, f は単射だから, $x_1 = x_2$. ゆえに, $g \circ f$ は単射である.

(3) $g \circ f : A \to C$ は全射だから, 任意の $z \in C$ に対して, ある $x \in A$ が存在して, $(g \circ f)(x) = z$. このとき, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ だから, $f(x) = y\ (\in B)$ とおくと, 任意の $z \in C$ に対して, ある $y \in B$ が存在して, $g(y) = z$. すなわち, g は全射である.

(4) 任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ とする. このとき, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. ゆえに, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. これは $g \circ f$ は単射だから, $x_1 = x_2$. したがって, f は単射である.

7. (1) 任意の $y \in f(A)$ に対して, ある $x_1, x_2 \in A(x_1 \neq x_2)$ が存在して, $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$ と仮定する. このとき, $y = f(x_1) = f(x_2)$. f は単射だから, $x_1 = x_2$. これは矛盾. すなわち, 任意の $y \in f(A)$ に対して, $(y, x) \in f^{-1}$ となる $x \in A$ は唯一存在する. したがって, f^{-1} は $f(A)$ から A への関数である.
一方, 任意の $y_1, y_2 \in f(A)$ に対して, $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ とする. $y_1 \in f(A)$ だから, ある $x_1 \in A$ が存在して, $f(x_1) = y_1$. すなわち, $f^{-1}(y_1) = x_1$. また, $y_2 \in f(A)$ だから, ある $x_2 \in A$ が存在して, $f(x_2) = y_2$. すなわち, $f^{-1}(y_2) = x_2$. ゆえに, $x_1 = x_2$. このとき, $f(x_1) = f(x_2)$ だから $y_1 = y_2$. ゆえに, f^{-1} は単射である.

(2) f は全射だから, $f(A) = B$. (1) により, f^{-1} は B から A への単射である.
一方, f は A から B への関数だから, 任意の $x \in A$ に対して, ある $y \in B$ が存在して, $y = f(x)$. すなわち, $f^{-1}(y) = x$. したがって, f^{-1} は全射である.

8. (1) 任意の $x \in X$ に対して, $f(x) \in f(X)$ だから, $x \in f^{-1}(f(X))$. ゆえに, $X_1 \subseteq f^{-1}(f(X))$.
$y \in f(f^{-1}(Y))$ とする. このとき, $x \in f^{-1}(Y)$ が存在して, $y = f(x)$. $x \in f^{-1}(Y)$ だから, $f(x) \in Y_1$. すなわち, $y \in Y$. ゆえに, $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

(2) 任意の $y \in f(X_1)$ に対して, $x \in X_1$ が存在して, $y = f(x)$. $X_1 \subseteq X_2$ だから, $x \in X_2$. ゆえに, $f(x) \in f(X_2)$ であり, $y \in f(X_2)$. すなわち, $f(X_1) \subseteq f(X_2)$.
任意の $x \in f^{-1}(Y_1)$ に対して, $f(x) \in Y_1 \subseteq Y_2$. ゆえに, $x \in f^{-1}(Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$.

(3) 任意の $y \in f(X_1 \cup X_2)$ に対して, $x \in X_1 \cup X_2$ が存在して, $y = f(x)$. $x \in X_1 \cup X_2$ だから, $x \in X_1$ または $x \in X_2$. ゆえに, $f(x) \in f(X_1)$ または $f(x) \in f(X_2)$ だから, $y = f(x) \in f(X_1) \cup f(X_2)$. すなわち, $f(X_1 \cup X_2) \subseteq f(X_1) \cup f(X_2)$.
一方, 任意の $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$ に対して, $y \in f(X_1)$ または $y \in f(X_2)$. $y \in f(X_1)$ のとき, $x_1 \in X_1$ が存在して, $y = f(x_1)$. $X_1 \subseteq X_1 \cup X_2$ だから, $x_1 \in X_1 \cup X_2$. ゆえに, $y = f(x_1) \in f(X_1 \cup X_2)$. $y \in f(X_2)$ のとき, $x_2 \in X_2$ が存在して, $y = f(x_2)$. $X_2 \subseteq X_1 \cup X_2$ だから, $x_2 \in X_1 \cup X_2$. ゆえに, $y = f(x_2) \in f(X_1 \cup X_2)$. いずれの場合も, $x \in X_1 \cup X_2$ が存在して, $y = f(x) \in f(X_1 \cup X_2)$. すなわち, $f(X_1) \cup f(X_2) \subseteq f(X_1 \cup X_2)$.
以上から, $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
任意の $x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$ に対して, $f(x) \in Y_1 \cup Y_2$ だから, $f(x) \in Y_1$ または $f(x) \in Y_2$. ゆえに, $x \in f^{-1}(Y_1)$ または $x \in f^{-1}(Y_2)$ だから, $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
一方, 任意の $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$ に対して, $x \in f^{-1}(Y_1)$ または $x \in f^{-1}(Y_2)$. ゆえに, $f(x) \in Y_1$ または $f(x) \in Y_2$ だから, $f(x) \in Y_1 \cup Y_2$ であり, $x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$.
以上から, $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

(4) 任意の $y \in f(X_1 \cap X_2)$ に対して, $x \in X_1 \cap X_2$ が存在して, $y = f(x)$. $x \in X_1 \cap X_2$ だから, $x \in X_1$ かつ $x \in X_2$. ゆえに, $f(x) \in f(X_1)$ かつ $f(x) \in f(X_2)$ だから, $y = f(x) \in f(X_1) \cap f(X_2)$. すなわち, $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$.
任意の $x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$ に対して, $f(x) \in Y_1 \cap Y_2$ だから, $f(x) \in Y_1$ かつ $f(x) \in Y_2$. ゆえに, $x \in f^{-1}(Y_1)$ かつ $x \in f^{-1}(Y_2)$ だから, $x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.
一方, 任意の $x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$ に対して, $x \in f^{-1}(Y_1)$ かつ $x \in f^{-1}(Y_2)$. ゆえに, $f(x) \in Y_1$ かつ $f(x) \in Y_2$ だから, $f(x) \in Y_1 \cap Y_2$ であり, $x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$.
以上から, $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

(5) 任意の $y \in f(X_1) - f(X_2)$ に対して, $y \in f(X_1)$ かつ $y \notin f(X_2)$. $y \in f(X_1)$ だから, $x_1 \in X_1$ が存在して, $y = f(x_1)$. また, $y \notin f(X_2)$ だから, 任意の $x_2 \in X_2$ に対して, $y = f(x_2)$ とならない. ゆえに, $x_1 \in X_1 - X_2$ だから, $y = f(x_1) \in f(X_1 - X_2)$. すなわち, $f(X_1) - f(X_2) \subseteq f(X_1 - X_2)$.
任意の $x \in f^{-1}(Y_1 - Y_2)$ に対して, $f(x) \in Y_1 - Y_2$ だから, $f(x) \in Y_1$ かつ $f(x) \notin Y_2$. ゆえに, $x \in f^{-1}(Y_1)$ かつ $x \notin f^{-1}(Y_2)$ だから, $x \in f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1 - Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$.
一方, 任意の $x \in f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$ に対して, $x \in f^{-1}(Y_1)$ かつ $x \notin f^{-1}(Y_2)$. ゆえに, $f(x) \in Y_1$ かつ $f(x) \notin Y_2$ だから, $f(x) \in Y_1 - Y_2$ であり, $x \in f^{-1}(Y_1 - Y_2)$. すなわち, $f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 - Y_2)$.
以上から, $f^{-1}(Y_1 - Y_2) = f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$.