2016. 6. 9

「離散数学及び演習」B クラス 中間試験問題解答例

（満点 30）

1. （配点合計 19）

(1) i) （配点 5）

求める直和分割は次の 5 つである.

$\pi_1 = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$,
$\pi_2 = \{\{a,b\},\{c\}\}$,
$\pi_3 = \{\{a,c\},\{b\}\}$,
$\pi_4 = \{\{a\},\{b,c\}\}$,
$\pi_5 = \{\{a,b,c\}\}$

（注意）集合の括弧（$\{,\}$）をしっかり書いていない場合は減点.

ii) （配点 5）

i) で求めた直和分割 π_i $(i = 1,2,3,4,5)$ が定める A 上の同値関係を R_{π_i} とすると,

$$R_{\pi_1} = \bigcup_{X\in\pi_1} X^2 = (\{a\}\times\{a\})\cup(\{b\}\times\{b\})\cup(\{c\}\times\{c\}) = \{(a,a),(b,b),(c,c)\},$$
$$R_{\pi_2} = \bigcup_{X\in\pi_2} X^2 = (\{a,b\}\times\{a,b\})\cup(\{c\}\times\{c\}) = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\},$$
$$R_{\pi_3} = \bigcup_{X\in\pi_3} X^2 = (\{a,c\}\times\{a,c\})\cup(\{b\}\times\{b\}) = \{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c),(b,b)\},$$
$$R_{\pi_4} = \bigcup_{X\in\pi_4} X^2 = (\{a\}\times\{a\})\cup(\{b,c\}\times\{b,c\}) = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\},$$
$$R_{\pi_5} = \bigcup_{X\in\pi_5} X^2 = \{a,b,c\}\times\{a,b,c\} = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$$

iii) （配点 2）

任意の R_{π_i} $(i = 1,2,3,4,5)$ に対して, $R_{\pi_i} \subseteq R_{\pi_5}$ だから, $\pi_{\max} = \pi_5$ である.
任意の R_{π_i} $(i = 1,2,3,4,5)$ に対して, $R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_i}$ だから, $\pi_{\min} = \pi_1$ である.

iv) （配点 1）

$(a,a),(b,b),(c,c) \in R_{\pi_5}$ だから, $R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_5}$. ゆえに, $\pi_1 \le \pi_5$ だから, $\pi_{\min} \le \pi_{\max}$.

（典型的な誤答）$\pi_{\min}$ は $\pi_{\max}$ の細分だから, $\pi_{\min} \le \pi_{\max}$.

$\pi_{\min}$ は $\pi_{\max}$ の細分であることを示していない. それは定義に基づいて示す. すなわち, それぞれの直和分割が定める A 上の同値関係の $\pi_{\min}, \pi_{\max}$ に対して, $R_{\pi_{\min}} \subseteq R_{\pi_{\max}}$ を示す.

(2) （配点 4）

任意の $\pi \in \Pi$ に対して, $R_\pi \subseteq R_\pi$. ゆえに, $\pi \le \pi$ だから, $\le$ は反射的である.

任意の $\pi_i, \pi_j \in \Pi$ に対して, $\pi_i \le \pi_j$ かつ $\pi_j \le \pi_i$ とする. このとき, $R_{\pi_i} \subseteq R_{\pi_j}$ かつ $R_{\pi_j} \subseteq R_{\pi_i}$. ゆえに, $R_{\pi_i} = R_{\pi_j}$. このとき, $A/R_{\pi_i} = A/R_{\pi_j}$ だから, $\pi_i = \pi_j$. したがって, $\le$ は反対称的である.

任意の $\pi_i, \pi_j, \pi_k \in \Pi$ に対して, $\pi_i \le \pi_j$ かつ $\pi_j \le \pi_k$ とする. このとき, $R_{\pi_i} \subseteq R_{\pi_j}$ かつ $R_{\pi_j} \subseteq R_{\pi_k}$. ゆえに, $R_{\pi_i} \subseteq R_{\pi_k}$ だから, $\pi_i \le \pi_k$. したがって, $\le$ は推移的である.

以上から, $\le$ は半順序である.

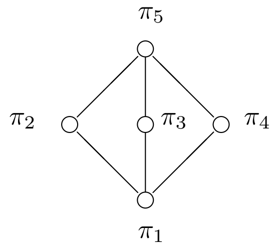
（典型的な誤答）任意の $\pi_i, \pi_j \in \Pi$ に対して, $\pi_i \le \pi_j$ かつ $\pi_j \le \pi_i$ とする. ゆえに, $\pi_i = \pi_j$ だから, $\le$ は反対称的である.

「$\pi_i \le \pi_j$ かつ $\pi_j \le \pi_i$」から「$\pi_i = \pi_j$」は直ちに導けない. $\pi_i = \pi_j$ は, 直和分割が等しい, すなわち, （ブロックの）集合が等しいということである. それに対して, $\pi_i \le \pi_j$ は, 細分である, すなわち, それぞれの直和分割が定める A 上の同値関係の間に包含があるということである.

(3) （配点 2）

$R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_2}, R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_3}, R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_4}, R_{\pi_2} \subseteq R_{\pi_5}, R_{\pi_3} \subseteq R_{\pi_5}, R_{\pi_4} \subseteq R_{\pi_5}$ だから,
$\pi_1 \le \pi_2, \pi_1 \le \pi_3, \pi_1 \le \pi_4, \pi_2 \le \pi_5, \pi_3 \le \pi_5, \pi_4 \le \pi_5$.

ゆえに, 求める Hasse 図は下図である.



2. (配点合計 11)

(1) (配点 2)
成り立たない.
(反例) $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ とする.
このとき, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
一方, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(\{a\}) \cup \mathcal{P}(\{b\}) = \{\phi, \{a\}\} \cup \{\phi, \{b\}\} = \{\phi, \{a\}, \{b\}\}$.
ゆえに, $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
(典型的な誤答)
「任意の $a \in A, b \in B$ に対して」で始めると, 反例にならない.

(2) (配点 2)
F の定義域は, $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ である.
$F(\phi) = \{f(x) \mid x \in \phi\} = \phi$,
$F(\{a\}) = \{f(x) \mid x \in \{a\}\} = \{f(a)\} = \{1\}$,
$F(\{b\}) = \{f(x) \mid x \in \{b\}\} = \{f(b)\} = \{1\}$,
$F(\{c\}) = \{f(x) \mid x \in \{c\}\} = \{f(c)\} = \{2\}$,
$F(\{a, b\}) = \{f(x) \mid x \in \{a, b\}\} = \{f(a), f(b)\} = \{1\}$,
$F(\{a, c\}) = \{f(x) \mid x \in \{a, c\}\} = \{f(a), f(c)\} = \{1, 2\}$,
$F(\{b, c\}) = \{f(x) \mid x \in \{b, c\}\} = \{f(b), f(c)\} = \{1, 2\}$,
$F(\{a, b, c\}) = \{f(x) \mid x \in \{a, b, c\}\} = \{f(a), f(b), f(c)\} = \{1, 2\}$.
ゆえに, $F = \begin{bmatrix} \phi & \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{a, b\} & \{a, c\} & \{b, c\} & \{a, b, c\} \\ \phi & \{1\} & \{1\} & \{2\} & \{1\} & \{1, 2\} & \{1, 2\} & \{1, 2\} \end{bmatrix}$.
(典型的な誤答)
$F(\phi)$ を示していない解答が多い.

(3) (配点 1)
任意の $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$ に対して, $F(X_1) = F(X_2)$ ならば $X_1 = X_2$.
(別解)
任意の $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$ $(X_1 \neq X_2)$ に対して, $F(X_1) \neq F(X_2)$.

(4) (配点 2)
f は単射であるとする.
任意の $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$ に対して, $F(X_1) = F(X_2)$ とする. 任意の $x_1 \in X_1$ に対して, $f(x_1) \in F(X_1) = F(X_2)$ だから, ある $x_2 \in X_2$ が存在して, $f(x_1) = f(x_2) \in F(X_2)$. f は単射だから, $x_1 = x_2$. ゆえに, $x_1 \in X_2$ だから, $X_1 \subseteq X_2$.
同様に, $X_2 \subseteq X_1$.
したがって, $X_1 = X_2$ だから, F は単射である.
(別解)
f は単射であるとする.
さらに, ある $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$ $(X_1 \neq X_2)$ が存在して, $F(X_1) = F(X_2)$ と仮定する. このとき, $a \in X_1$ が存在して, $a \notin X_2$.
$a \in X_1$ だから, $f(a) \in \{f(x) \mid x \in X_1\} = F(X_1) = F(X_2) = \{f(x) \mid x \in X_2\}$. ゆえに, $a \in X_2$ であり, 矛盾.
したがって, $F(X_1) \neq F(X_2)$ であり, F は単射である.
(典型的な誤答) f は単射であるとする. 任意の $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$ に対して, $F(X_1) = F(X_2)$ とする. このとき, F の定義から $F(X_1) = f(X_1)$, $F(X_2) = f(X_2)$ だから, $f(X_1) = f(X_2)$. f は単射だから, $X_1 = X_2$. ゆえに, F は単射である.

f が単射であっても, $f(X_1)=f(X_2)$ から $X_1=X_2$ は直ちに導けない．f が単射であることの定義は,「任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して, $f(x_1)=f(x_2)$ ならば $x_1=x_2$」である．それに対して，$f(X_1)=\{f(x) \mid x \in X_1\}$，$f(X_2)=\{f(x) \mid x \in X_2\}$ であり，X_1，X_2 はともに A の要素ではない（$\mathcal{P}(A)$ の要素である）．

(5) （配点 4）

（例）$f=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ とすると,

$F(\phi)=\{f(x) \mid x \in \phi\}=\phi$,
$F(\{a\})=\{f(x) \mid x \in \{a\}\}=\{f(a)\}=\{1\}$,
$F(\{b\})=\{f(x) \mid x \in \{b\}\}=\{f(b)\}=\{2\}$,
$F(\{c\})=\{f(x) \mid x \in \{c\}\}=\{f(c)\}=\{3\}$,
$F(\{a,b\})=\{f(x) \mid x \in \{a,b\}\}=\{f(a),f(b)\}=\{1,2\}$,
$F(\{a,c\})=\{f(x) \mid x \in \{a,c\}\}=\{f(a),f(c)\}=\{1,3\}$,
$F(\{b,c\})=\{f(x) \mid x \in \{b,c\}\}=\{f(b),f(c)\}=\{2,3\}$,
$F(\{a,b,c\})=\{f(x) \mid x \in \{a,b,c\}\}=\{f(a),f(b),f(c)\}=\{1,2,3\}$.
ゆえに, $F=\begin{bmatrix} \phi & \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{a,b\} & \{a,c\} & \{b,c\} & \{a,b,c\} \\ \phi & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{1,2\} & \{1,3\} & \{2,3\} & \{1,2,3\} \end{bmatrix}$ であり, このとき F は全単射である.

（補足）f が全単射であるとき, F も全単射である.
実際, f は全射であるとし, 任意の $Y \in \mathcal{P}(B)$ を考える．このとき, f は全射だから, 任意の $y \in Y$ に対して，$x \in A$ が存在して, $f(x)=y$. そこで, $X=\{x \in A \mid f(x) \in Y\} \in \mathcal{P}(A)$ とおくと, $F(X)=f(X)=\{f(x) \mid x \in X\}=Y$. ゆえに, F は全射である.
このことと (3) から, 明らかである.