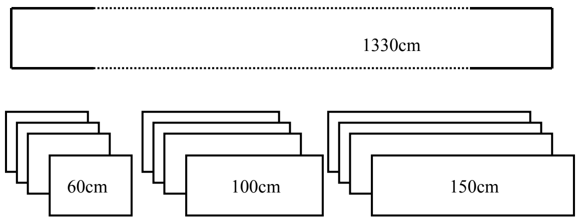
離散数学及び演習
講義 8　2016. 6. 9(木)2限

1 次不定方程式
（教科書　pp.117-127）
合同式
（教科書　pp.127-131）

問題

長さ 60cm，100cm，150cm の鉄板を使って，
長さ1330cm の溝を覆うためには，どの鉄板を
何枚使えばよいか？



問題の定式化

長さ 60cm，100cm，150cm の鉄板の枚数をそれぞれ
x, y, z とすると，
　$60x+100y+150z=1330$
の非負整数解を求める．

解1　$x=8$, $y=1$, $z=5$
解2　$x=13$, $y=4$, $z=1$
解3　$x=8$, $y=4$, $z=3$
解4　$x=3$, $y=4$, $z=5$
　：

1 次不定方程式

- 係数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbf{Z}$，変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{Z}$ についての(n 元)1 次不定方程式
（indeterminate equation）
  - $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$
  - 1 次不定方程式の解　…　整数解

定理(復習)

- 任意の $m, n\in\mathbf{Z}$ に対して，$x, y\in\mathbf{Z}$ が存在して，
$mx+ny=\gcd(m, n)$.

例：　$\gcd(10, 15)=5=10\cdot(-1)+15\cdot 1$
　　　$\gcd(30, 77)=1=30\cdot 18+77\cdot(-7)$

- 任意の $a_1, a_2, \ldots, a_n\in\mathbf{Z}$ に対して，
$x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathbf{Z}$ が存在して，
$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

定理(1 次不定方程式の解の存在)

- 任意の $m, n\in\mathbf{Z}$ に対して，$x, y\in\mathbf{Z}$ が存在して，
$mx+ny=k$ であるとき，かつそのときに限り，
$\gcd(m, n) \mid k$.

- 任意の $a_1, a_2, \ldots, a_n\in\mathbf{Z}$ に対して，
$x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathbf{Z}$ が存在して，
$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$ であるとき，
かつそのときに限り，
$\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid b$.

証明

任意の m, $n \in \mathbf{Z}$ に対して，x, $y \in \mathbf{Z}$ が存在して，$mx+ny=k$ であるとき，かつそのときに限り，$\gcd(m, n) \mid k$.

- a)「x, $y \in \mathbf{Z}$ が存在して，$mx+ny=k$ ならば，$\gcd(m, n) \mid k$」を示す.
- b)「$\gcd(m, n) \mid k$ ならば，x, $y \in \mathbf{Z}$ が存在して，$mx+ny=k$」を示す.

---

a)　x, $y \in \mathbf{Z}$ が存在して，$mx+ny=k$ と仮定する.
　$\gcd(m, n) \mid m$ かつ $\gcd(m, n) \mid n$ だから，$\gcd(m, n) \mid mx+ny$.
　すなわち，$\gcd(m, n) \mid k$.
b)　$\gcd(m, n) \mid k$ と仮定する.
　このとき，$q \in \mathbf{Z}$ が存在して，$k=q \cdot \gcd(m, n)$.
　一方，定理から，x', $y' \in \mathbf{Z}$ が存在して，$mx'+ny'=\gcd(m, n)$.
　ゆえに，$k=q(mx'+ny')=mqx'+nqy'$.
　ここで，$x=qx'$, $y=qy'$ とおくと，x, $y \in \mathbf{Z}$ であり，$mx+ny=k$.

系（1 次不定方程式の解の存在）

任意の m, $n \in \mathbf{Z}$ に対して，$\gcd(m, n)=1$ ならば，
x, $y \in \mathbf{Z}$ が存在して，$mx+ny=k$.

- 「任意の m, $n \in \mathbf{Z}$ に対して，$\gcd(m, n) \mid k$ ならば，x, $y \in \mathbf{Z}$ が存在して，$mx+ny=k$」から明らか.

定理（1 次不定方程式の解の全体）

$\gcd(m, n) \mid k$，かつ，1 次不定方程式 $mx+ny=k$ の解のひとつ（特殊解）を x_0, y_0 とすると，
x, $y \in \mathbf{Z}$ が解であるとき，かつそのときに限り，

$$x = x_0 + \frac{n}{d} q$$

$$y = y_0 - \frac{m}{d} q \qquad (q \in \mathbf{Z}).$$

ただし，$d=\gcd(m, n)$.

- 一般解は上記のように表せる.
  - 1 次不定方程式は，解が存在するならば，解は無数に存在する.

証明

$\gcd(m, n) \mid k$，かつ，$mx+ny=k$ の特殊解を x_0, y_0 とすると，
x, $y \in \mathbf{Z}$ が解であるとき，かつそのときに限り，
$x=x_0+(n/d)q$,　$y=y_0-(m/d)q$ $(q \in \mathbf{Z})$．ただし，$d=\gcd(m, n)$.

- a)「$x=x_0+(n/d)q$, $y=y_0-(m/d)q$ ならば，x, y は解である」を示す.
- b)「x, y が解であるならば，$x=x_0+(n/d)q$, $y=y_0-(m/d)q$」を示す.

---

a)　$x=x_0+(n/d)q$, $y=y_0-(m/d)q$ とすると，

$$\begin{aligned} mx+ny &= m(x_0+(n/d)q)+n(y_0-(m/d)q) \\ &= mx_0+ny_0 \\ &= k \end{aligned}$$

だから，x, y は解である.

証明

$\gcd(m, n) \mid k$，かつ，$mx+ny=k$ の特殊解を x_0, y_0 とすると，
x, $y \in \mathbf{Z}$ が解であるとき，かつそのときに限り，
$x=x_0+(n/d)q$,　$y=y_0-(m/d)q$ $(q \in \mathbf{Z})$．ただし，$d=\gcd(m, n)$.

- b)「x, yが解であるならば，$x=x_0+(n/d)q$, $y=y_0-(m/d)q$」を示す.

---

b)　x, y は解であるとする．このとき，$mx+ny=k$.
　x_0, y_0 は特殊解だから，$mx_0+ny_0=k$.
　ゆえに，$m(x-x_0)=-n(y-y_0)$.
　ところで，d は m, n の最大公約数 だから，m', $n' \in \mathbf{Z}$ が存在して，
　$m=m'd$, $n=n'd$（ただし，$\gcd(m', n')=1$）.
　ゆえに，$m'd(x-x_0)=-n'd(y-y_0)$ だから，$n' \mid m'(x-x_0)$.
　$\gcd(m', n')=1$ だから，$n' \mid x-x_0$.
　このとき，$q \in \mathbf{Z}$ が存在して，$x-x_0=q \cdot n'$.
　ゆえに，$x=x_0+n' \cdot q=x_0+(n/d)q$.
　また，$-n'd(y-y_0)=m'd(x-x_0)=m'dqn'$だから，$y-y_0=-m'q$.
　ゆえに，$y=y_0-(m/d)q$.

1 次不定方程式の解法

- 入力：m, n, $q \in \mathbf{Z}$　$(m>n)$
- 出力：$mx+ny=q \cdot \gcd(m, n)$ の整数解 x, y
- 手順：$mx+ny$

$$\begin{array}{ll}
=(q_1 n+r_1)x+ny & m=q_1 \cdot n+r_1 \\
=n(q_1 x+y)+r_1 x & \\
=nx_1+r_1 x & x_1=q_1 x+y \\
=(q_2 r_1+r_2)x_1+r_1 x & n=q_2 \cdot r_1+r_2 \\
=r_1(q_2 x_1+x)+r_2 x_1 & \\
=r_1 x_2+r_2 x_1 & x_2=q_2 x_1+x \\
=(q_3 r_2+r_3)x_2+r_2 x_1 & r_1=q_3 \cdot r_2+r_3 \\
=r_2(q_3 x_2+x_1)+r_3 x_2 & \\
=r_2 x_3+r_3 x_2 & x_3=q_3 x_2+x_1 \\
\vdots &
\end{array}$$

1 次不定方程式の解法(続き)

- 入力： $m, n, q \in \mathbf{Z}$ $(m > n)$
- 出力： $mx + ny = q \cdot \gcd(m, n)$ の整数解 x, y
- 手順： $mx + ny$

$$
\begin{aligned}
& \vdots \\
&= (q_k r_{k-1} + r_k) x_{k-1} + r_{k-1} x_{k-2} && r_{k-2} = q_k \cdot r_{k-1} + r_k \\
&= r_{k-1} (q_k x_{k-1} + x_{k-2}) + r_k x_{k-1} && \\
&= r_{k-1} x_k + r_k x_{k-2} && x_k = q_k x_{k-1} + x_{k-2} \\
&= (q_{k+1} r_k) x_k + r_k x_{k-1} && r_{k-1} = q_{k+1} \cdot r_k + 0 \\
&= r_k (q_{k+1} x_k + x_{k-1}) && \\
&= r_k x_{k+1} && x_{k+1} = q_{k+1} x_k + x_{k-1}
\end{aligned}
$$

ゆえに，$r_k x_{k+1} = q \cdot \gcd(m, n)$

Euclid の互除法より，$r_k = \gcd(m, n)$ だから，$x_{k+1} = q$.

13

1 次不定方程式の解法(続き2)

- 入力： $m, n, q \in \mathbf{Z}$ $(m > n)$
- 出力： $mx + ny = q \cdot \gcd(m, n)$ の整数解 x, y
- 手順： $x_{k+1} = q_{k+1} x_k + x_{k-1} = q$
  - 特殊解　$x_k = 0$ とおく.

$$
\begin{aligned}
x_{k-1} &= x_{k+1} - q_{k+1} x_k && = q \\
x_{k-2} &= x_k - q_k x_{k-1} && = -q_k q \\
x_{k-3} &= x_{k-1} - q_{k-1} x_{k-2} && = q - q_{k-1}(-q_k q) \\
&\vdots \\
x_1 &= x_3 - q_3 x_2 \\
x &= x_2 - q_2 x_1 \\
y &= x_1 - q_1 x
\end{aligned}
$$

14

1 次不定方程式の解法(続き3)

- 入力： $m, n, q \in \mathbf{Z}$ $(m > n)$
- 出力： $mx + ny = q \cdot \gcd(m, n)$ の整数解 x, y
- 手順： $x_{k+1} = q_{k+1} x_k + x_{k-1} = q$
  - 一般解　$x_k = u$ とおく.　(u … パラメータ)

$$
\begin{aligned}
x_{k-1} &= x_{k+1} - q_{k+1} x_k && = q - q_{k+1} u \\
x_{k-2} &= x_k - q_k x_{k-1} && = u - q_k (q - q_{k+1} u) \\
x_{k-3} &= x_{k-1} - q_{k-1} x_{k-2} && = \dots \\
&\vdots \\
x_1 &= x_3 - q_3 x_2 \\
x &= x_2 - q_2 x_1 \\
y &= x_1 - q_1 x
\end{aligned}
$$

15

1 次不定方程式の解法(続き4)

例： $14x - 6y = 4$ の整数解 x, y

$$
\begin{aligned}
14x - 6y &= ((-2) \cdot (-6) + 2) x + (-6) y && 14 = (-2) \cdot (-6) + 2 \\
&= (-6)(-2x + y) + 2x && \boxed{x_1 = (-2)x + y} \\
&= -6x_1 + 2x && \\
&= ((-3) \cdot 2) x_1 + 2x && -6 = (-3) \cdot 2 + 0 \\
&= 2(-3x_1 + x) && \\
&= 2x_2 && \boxed{x_2 = -3x_1 + x}
\end{aligned}
$$

ゆえに，$2x_2 = 4$ だから，$x_2 = 2$.

- 特殊解　$x_1 = 0$ とおく.
  - $x = x_2 - (-3) x_1 = 2$
  - $y = x_1 - (-2) x = 4$
- 一般解　$x_1 = u$ とおく.
  - $x = x_2 - (-3) x_1 = 2 + 3u$
  - $y = x_1 - (-2) x = u + 2(2 + 3u) = 4 + 7u$

16

1 次不定方程式の解法(続き5)

例： $14x - 6y = 4$ の整数解 x, y　　絶対値最小の係数で括る

$$
\begin{aligned}
14x - 6y & \\
&= (-6)(-2x + y) + 2x && \leftarrow \ -6 \text{ で括る} \\
&= -6x_1 + 2x && x_1 = (-2)x + y \\
&= 2(-3x_1 + x) && \leftarrow \ 2 \text{ で括る} \\
&= 2x_2 && x_2 = -3x_1 + x
\end{aligned}
$$

ゆえに，$2x_2 = 4$ だから，$x_2 = 2$.

- 特殊解　$x_1 = 0$ とおく.
  - $x = x_2 - (-3) x_1 = 2$
  - $y = x_1 - (-2) x = 4$
- 一般解　$x_1 = u$ とおく.
  - $x = x_2 - (-3) x_1 = 2 + 3u$
  - $y = x_1 - (-2) x = u + 2(2 + 3u) = 4 + 7u$

17

1 次不定方程式の解法(続き6)

例： $60x + 100y + 150z = 1330$ の整数解 x, y, z

- $6x + 10y + 15z = 133$ の整数解を求める

$$
\begin{aligned}
6x + 10y + 15z &= 6(x + y + 2z) + 4y + 3z && \leftarrow \ 6 \text{ で括る} \\
&= 6u + 4y + 3z && \boxed{u = x + y + 2z} \\
&= 3(2u + y + z) + y && \leftarrow \ 3 \text{ で括る} \\
&= 3v + y && \boxed{v = 2u + y + z}
\end{aligned}
$$

ゆえに，$3v + y = 133$ だから，$y = 133 - 3v$.

$z = v - 2u - y = v - 2u - (133 - 3v) = -2u + 4v - 133$

$x = u - y - 2z = u - (133 - 3v) - 2(-2u + 4v - 133)$

$= 5u - 5v + 133$

- $u = 19$, $v = 44$ のとき，$x = 8$, $y = 1$, $z = 5$
- $u = 19$, $v = 43$ のとき，$x = 13$, $y = 4$, $z = 1$

18

整数を法とする合同関係（復習）

- $m, n, p \in \mathbf{Z}$ に対して，
  m と n は p を法（modulo）として合同（congruent）
  $\ldots\ m \equiv_p n,\quad m \equiv n \pmod{p}$
  - m と n は p で割ったときの剰余が等しい
  - $m - n$ は p の倍数
  - $p \mid m - n$

例：
- $365 \equiv 1 \pmod{7}$
  - $365 - 1 = 364 = 52 \cdot 7$
- $-12 \equiv 14 \pmod{13}$
  - $-12 - 14 = -26 = -2 \cdot 13$

19

整数を法とする合同関係（続き）

- $m \equiv n \pmod{p}$
  - $p \mid m - n$
- $m \equiv 0 \pmod{p}$
  - $p \mid m$
- $m \equiv n \pmod{p}$ iff $m \equiv n \pmod{-p}$
  - $p \mid m - n$ iff $-p \mid m - n$

20

定理（復習）

$p \in \mathbf{Z}$ を法とする合同関係は $\mathbf{Z}$ 上の同値関係である．

- すなわち，次の（1）～（3）が成り立つ．

（1）任意の $m \in \mathbf{Z}$ に対して，$m \equiv m \pmod{p}$．
（2）任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ に対して，
　$m \equiv n \pmod{p}$ならば，$n \equiv m \pmod{p}$．
（3）任意の $m, n, l \in \mathbf{Z}$ に対して，
　$m \equiv n \pmod{p}$かつ $n \equiv l \pmod{p}$ ならば，$m \equiv l \pmod{p}$．

21

定理

任意の $m, n, p \in \mathbf{Z}$ $(p \neq 0)$ に対して，次の（1）～（3）は互いに同値である．

（1）　$m \equiv n \pmod{p}$
（2）　$k \in \mathbf{Z}$ が存在して，$m = n + k \cdot p$
（3）　m を p で割ったときの剰余と
　　n を p で割ったときの剰余は等しい

22

証明

任意の $m, n, p \in \mathbf{Z}(p \neq 0)$ に対して，次の（1）～（3）は互いに同値である．
（1）$m \equiv n \pmod{p}$
（2）$k \in \mathbf{Z}$ が存在して，$m = n + k \cdot p$
（3）m を p で割ったときの剰余と n を p で割ったときの剰余は等しい

- a)「（1）ならば（2）」を示す．
- b)「（2）ならば（3）」を示す．
- c)「（3）ならば（1）」を示す．

---

a）$m \equiv n \pmod{p}$と仮定する．
　このとき，$p \mid m - n$．
　ゆえに，$k \in \mathbf{Z}$ が存在して，$m - n = k \cdot p$．
　すなわち，$m = n + k \cdot p$．

23

証明（続き）

任意の $m, n, p \in \mathbf{Z}(p \neq 0)$ に対して，次の（1）～（3）は互いに同値である．
（1）$m \equiv n \pmod{p}$
（2）$k \in \mathbf{Z}$ が存在して，$m = n + k \cdot p$
（3）m を p で割ったときの剰余と n を p で割ったときの剰余は等しい

- b)「（2）ならば（3）」を示す．

---

b）ある $k \in \mathbf{Z}$ に対して，$m = n + k \cdot p$ と仮定する．
　また，m, n を p で割ったときの剰余をそれぞれ $r, r' \in \mathbf{Z}$ とする．
　このとき，$q, q' \in \mathbf{Z}$ に対して，$m = q \cdot p + r,\ n = q' \cdot p + r'$
　$(0 \leq r < |p|,\ 0 \leq r' < |p|)$．
　ゆえに，$m = (q' \cdot p + r') + k \cdot p = q \cdot p + r$ だから，
　$(q - q' - k)p - (r - r') = 0$．
　$p \neq 0$ だから，$q - q' = k$，かつ，$r = r'$．
　ゆえに，m を p で割ったときの剰余と n を p で割ったときの剰余は等しい．

24

証明(続き2)

任意の $m, n, p \in \mathbf{Z} (p \neq 0)$ に対して，次の(1)～(3)は互いに同値である．

(1)　$m \equiv n \pmod{p}$

(2)　$k \in \mathbf{Z}$ が存在して，$m = n + k \cdot p$

(3)　m を p で割ったときの剰余と n を p で割ったときの剰余は等しい

- c)「(3)ならば(1)」を示す．

---

c)　$q, q', r \in \mathbf{Z}$ に対して，

$m = q \cdot p + r$, $n = q' \cdot p + r$　$(0 \leq r < |p|)$ と仮定する．

このとき，$m - n = (q - q')p$.

$q - q' \in \mathbf{Z}$ だから，$p \mid m - n$.

すなわち，$m \equiv n \pmod{p}$.

25

定理(合同関係における加減乗算)

任意の $a, b, c, d, p \in \mathbf{Z}$ に対して，

$a \equiv b \pmod{p}$, $c \equiv d \pmod{p}$ ならば，次の(1)～(3)が成り立つ．

(1)　$a + c \equiv b + d \pmod{p}$

(2)　$a - c \equiv b - d \pmod{p}$

(3)　$ac \equiv bd \pmod{p}$

> **【参考】**任意の $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ に対して，$a = b$, $c = d$ ならば，次の(1)～(3)が成り立つ．
> (1)　$a + c = b + d$
> (2)　$a - c = b - d$
> (3)　$ac = bd$

例：

- $29 \equiv -1 \pmod{6}$, $13 \equiv 1 \pmod{6}$
  - $29 + 1 \equiv -1 + 1 \pmod{6}$, すなわち，$42 \equiv 0 \pmod{6}$.
  - $29 - 13 \equiv -1 - 1 \pmod{6}$, すなわち，$16 \equiv -2 \pmod{6}$.
- $25 \equiv 14 \pmod{11}$, $79 \equiv 2 \pmod{11}$
  - $25 \cdot 79 \equiv 14 \cdot 2 \pmod{11}$, すなわち，$1975 \equiv 28 \pmod{11}$.

26

証明

任意の $a, b, c, d, p \in \mathbf{Z}$ に対して，

$a \equiv b \pmod{p}$, $c \equiv d \pmod{p}$ ならば，

(1)　$a + c \equiv b + d \pmod{p}$

$a \equiv b \pmod{p}$, $c \equiv d \pmod{p}$ だから，$q, q' \in \mathbf{Z}$ が存在して，

$a - b = q \cdot p$,　$c - d = q' \cdot p$.

(1)　$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$

$= q \cdot p + q' \cdot p$

$= (q + q')p$

$q + q' \in \mathbf{Z}$ だから，$a + c \equiv b + d \pmod{p}$.

27

証明(続き)

任意の $a, b, c, d, p \in \mathbf{Z}$ に対して，

$a \equiv b \pmod{p}$, $c \equiv d \pmod{p}$ ならば，

(3)　$ac \equiv bd \pmod{p}$

$a \equiv b \pmod{p}$, $c \equiv d \pmod{p}$ だから，$q, q' \in \mathbf{Z}$ が存在して，

$a - b = q \cdot p$,　$c - d = q' \cdot p$.

(3)　$ac - bd = (a - b)c + b(c - d)$

$= q \cdot p \cdot c + b \cdot q' \cdot p$

$= (qc + bq')p$

$qc + bq' \in \mathbf{Z}$ だから，$ac \equiv bd \pmod{p}$.

28

系(合同関係における加減乗算)

任意の $a, b, c, p \in \mathbf{Z}$ に対して，$a \equiv b \pmod{p}$ ならば，次の(1)～(3)が成り立つ．

(1)　$a \pm c \equiv b \pm c \pmod{p}$

(2)　$ac \equiv bc \pmod{p}$

(3)　$a^n \equiv b^n \pmod{p}$　$(n \in \mathbf{N}_0)$

> **【参考】**　任意の $a, b, c \in \mathbf{Z}$ に対して，$a = b$ ならば，次の(1)～(3)が成り立つ．
> (1)　$a \pm c = b \pm c$
> (2)　$ac = bc$
> (3)　$a^n = b^n$　$(n \in \mathbf{N}_0)$

29

証明

任意の $a, b, c, p \in \mathbf{Z}$ に対して，$a \equiv b \pmod{p}$ ならば，

(1)　$a \pm c \equiv b \pm c \pmod{p}$

(2)　$ac \equiv bc \pmod{p}$

(3)　$a^n \equiv b^n \pmod{p}$　$(n \in \mathbf{N}_0)$

---

(1)，(2)　$c \equiv c \pmod{p}$ だから，定理より明らか．

(3)　n に関する帰納法により示す．

（基底段階）　$n = 0$ のとき．

$a^0 = b^0 = 1$, $1 \equiv 1 \pmod{p}$ だから，明らか．

（帰納段階）　$a^{n-1} \equiv b^{n-1} \pmod{p}$ と仮定する．

$a \equiv b \pmod{p}$ だから，定理より，$a^{n-1} \cdot a \equiv b^{n-1} \cdot b \pmod{p}$.

ゆえに，$a^n \equiv b^n \pmod{p}$.

30

合同関係における乗算（続き）

例： 795^{25} を11で割ったときの剰余
- $795 \equiv 3 \pmod{11}$
- $795^{25} \equiv 3^{25} \pmod{11}$

- $3^2 = 9 \equiv -2 \pmod{11}$
- $3^4 = (3^2)^2 \equiv (-2)^2 = 4 \pmod{11}$
- $3^8 = (3^4)^2 \equiv 4^2 = 16 \equiv 5 \pmod{11}$
- $3^{16} = (3^8)^2 \equiv 5^2 = 25 \equiv 3 \pmod{11}$

- $3^{25} = 3^{16} \cdot 3^8 \cdot 3^1 \equiv 3 \cdot 5 \cdot 3 = 15 \cdot 3 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{11}$
- ゆえに，$795^{25} \equiv 1 \pmod{11}$

31

合同関係の応用

任意の a，$b \in \mathbf{Z}$ に対して，$365a + b \equiv a + b \pmod 7$
- a 年後（その間に閏日 b 回）の同じ日の曜日

例： 1979年1月1日（月）に対して，2016年1月1日（日）
- $365 \cdot 37 + 9 \equiv 37 + 2 \equiv 2 + 2 \equiv 4 \pmod 7$
- 7で割ったときの剰余
  0→月，1→火，2→水，3→木，4→金，5→土，6→日

$365 - 1 = 364 = 52 \cdot 7$ だから，$365 \equiv 1 \pmod 7$
ゆえに，$365a + b \equiv a + b \pmod 7$

32

合同関係の応用（続き）

- 九去法（casting out nines）（9で割ったときの剰余）

例： $12{,}345{,}678 \equiv 1 + 2 + \ldots + 7 + 8 = 36 \equiv 0 \pmod 9$

$n = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_{10}$
$\quad = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0 \qquad (a_i \in \mathbf{N}_0,\ 0 \leq a_i < 10)$
に対して，
$n \equiv a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9$
- $9 \mid n$ iff $9 \mid a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0$

$10 \equiv 1 \pmod 9$
$10^i \equiv 1^i = 1 \pmod 9$
$a_i 10^i \equiv a_i \pmod 9$
ゆえに，
$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0 \equiv a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9$

33

合同関係の応用（続き2）

- 11で割ったときの剰余

例： $12{,}345{,}678 \equiv -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 = 4 \pmod{11}$

$n = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_{10}$
$\quad = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0 \qquad (a_i \in \mathbf{N}_0,\ 0 \leq a_i < 10)$
に対して，
$n \equiv (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \ldots - a_1 + a_0 \pmod{11}$
- $11 \mid n$ iff $11 \mid (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \ldots - a_1 + a_0$

$10 \equiv -1 \pmod{11}$
$10^i \equiv (-1)^i \pmod{11}$
ゆえに，
$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0$
$\quad \equiv (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \ldots - a_1 + a_0 \pmod{11}$

$10^{2i} \equiv (-1)^{2i} = 1 \pmod{11}$，$10^{2i+1} \equiv (-1)^{2i+1} = -1 \pmod{11}$

34

合同関係の応用（続き3）

- 7で割ったときの剰余

例： $12{,}345{,}678 \equiv 12 - 345 + 678 \equiv 5 - 2 + 6 = 9 \equiv 2 \pmod 7$

$n = u_k 1000^k + u_{k-1} 1000^{k-1} + \ldots + u_1 1000^1 + a_0$
$\qquad (u_i \in \mathbf{N}_0,\ 0 \leq u_i < 1000)$
に対して，
$n \equiv (-1)^k u_k + (-1)^{k-1} u_{k-1} + \ldots - u_1 + u_0 \pmod 7$
- $7 \mid n$ iff $7 \mid (-1)^k u_k + (-1)^{k-1} u_{k-1} + \ldots - u_1 + u_0$

$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ だから，$1000 \equiv -1 \pmod 7$
$1000^i \equiv (-1)^i \pmod 7$
ゆえに，
$n = u_k 1000^k + u_{k-1} 1000^{k-1} + \ldots + u_1 1000^1 + u_0$
$\quad \equiv (-1)^k u_k + (-1)^{k-1} u_{k-1} + \ldots - u_1 + u_0 \pmod 7$

$1000^{2i} \equiv (-1)^{2i} = 1 \pmod 7$，$1000^{2i+1} \equiv (-1)^{2i+1} = -1 \pmod 7$

35

定理（合同関係における除算）

任意の a，b，c，$p \in \mathbf{Z}$ に対して，
$ac \equiv bc \pmod p$ かつ $\gcd(c, p) = d\ (\neq 0)$ ならば，
$a \equiv b \pmod{\frac{p}{d}}$．

【参考】 任意の a，b，$c \in \mathbf{Z}$ に対して，
$ac = bc$ かつ $c \neq 0$ ならば，$a = b$．

- 整数を法とする合同関係では
  - 「$ac \equiv bc$ かつ $c \not\equiv 0 \pmod p$ ならば，$a \equiv b$」は一般に成り立たない．
    例： $7 \times 2 \equiv 4 \times 2 \pmod 6$，$2 \not\equiv 0 \pmod 6$ であるが，$7 \not\equiv 4 \pmod 6$
  - $ac \equiv bc \pmod p$ かつ $\gcd(c, p) = 1$ ならば，$a \equiv b \pmod p$．
    例： $7 \times 5 \equiv 1 \times 5 \pmod 6$，$\gcd(5, 6) = 1$ であり，$7 \equiv 1 \pmod 6$．

36

証明

任意の $a, b, c, p \in \mathbf{Z}$ に対して，
$ac \equiv bc \pmod{p}$ かつ $\gcd(c, p) = d\ (\neq 0)$ ならば，
$a \equiv b \pmod{\frac{p}{d}}$.

---

d は c, p の最大公約数だから，$c', p' \in \mathbf{Z}$ が存在して，
$c = c' \cdot d$, $p = p' \cdot d$.
このとき，$\gcd(c', p') = 1$.
また，$ac \equiv bc \pmod{p}$ だから，$q \in \mathbf{Z}$ が存在して，$ac - bc = q \cdot p$.
ゆえに，$(a-b)c'd = qp'd$ だから，$p' \mid (a-b)c'$.
$\gcd(c', p') = 1$ だから，$p' \mid a-b$.
すなわち，$a \equiv b \pmod{p'}$ だから，$a \equiv b \pmod{\frac{p}{d}}$.

合同関係における零因子

- $a \in \mathbf{Z}$ は $p \in \mathbf{Z}$ を法とする合同関係における零因子（zero divisor）である
  - $c \in \mathbf{Z}$ が存在して，$c \not\equiv 0 \pmod{p}$ かつ $ac \equiv ca \equiv 0 \pmod{p}$

例：2 は 6 を法とする合同関係における零因子
  - $3 \not\equiv 0 \pmod{6}$ に対して，$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6 \equiv 0 \pmod{6}$

- 通常の等号関係では
  $ac = 0$ ならば $a = 0$ または $c = 0$.
- 整数を法とする合同関係では
  $ac \equiv 0 \pmod{p}$ であっても，
  $a \equiv 0 \pmod{p}$ または $c \equiv 0 \pmod{p}$ とは限らない．

系（合同関係における除算）

任意の $a, b, c \in \mathbf{Z}$ と任意の素数 p に対して，
次の(1)，(2)が成り立つ．
(1)　$ac \equiv bc \pmod{p}$ かつ $c \not\equiv 0 \pmod{p}$ ならば，
　$a \equiv b \pmod{p}$.
(2)　$ac \equiv 0 \pmod{p}$ ならば，
　$a \equiv 0 \pmod{p}$ または $c \equiv 0 \pmod{p}$.

- 素数を法とする合同関係については，通常の等号関係と同様に除算を行える．

証明

任意の $a, b, c \in \mathbf{Z}$ と任意の素数 p に対して，
次の(1)，(2)が成り立つ．
(1)　$ac \equiv bc \pmod{p}$ かつ $c \not\equiv 0 \pmod{p}$ ならば，$a \equiv b \pmod{p}$.
(2)　$ac \equiv 0 \pmod{p}$ ならば，$a \equiv 0 \pmod{p}$ または $c \equiv 0 \pmod{p}$.

---

(1)　$c \not\equiv 0 \pmod{p}$ だから，$p \mid c$ でない．
　ゆえに，$\gcd(c, p) = 1$ となり，定理より明らか．
(2)　$ac \equiv 0 \pmod{p}$ とする．
　ここで，$a \not\equiv 0 \pmod{p}$ かつ $c \not\equiv 0 \pmod{p}$ と仮定する．
　(1)において $b = 0$ とおくと，$a \equiv 0 \pmod{p}$.
　これは矛盾．
　ゆえに，$a \equiv 0 \pmod{p}$ または $c \equiv 0 \pmod{p}$.

まとめ

- 今回の講義
  - 1 次不定方程式
  - 合同式
- 次回の講義
  - 合同式（続き）（教科書　pp.131-137, 140-145）
- 今回の演習
  - なし