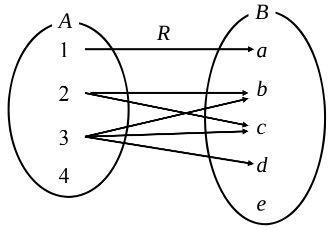
離散数学及び演習
講義 5　 2016．5.19（木）

関数
（教科書　pp.3-5，26-28）

2 項関係（復習）

- 集合 A から集合 B への 2 項関係 R
  - $R \subseteq A \times B$

例：$A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{a, b, c, d, e\}$
$R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$
$\subseteq A \times B$



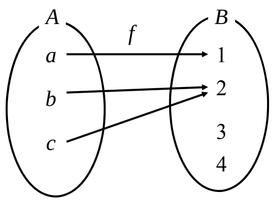
2

関数（function）

- 集合 A から集合 B への関数（写像（mapping））f
  - $f \subseteq A \times B$，かつ，任意の $x \in A$ に対して，$y \in B$ が唯一存在して，$(x, y) \in f$ である．

例：$A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$
$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\} \subseteq A \times B$

- 関数 $f \subseteq A \times B$
  … $f : A \to B$



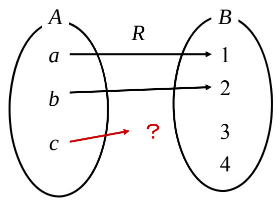
3

関数（続き）

- 関数 $f : A \to B$
  - $f \subseteq A \times B$，かつ，任意の $x \in A$ に対して，$y \in B$ が唯一存在して，$(x, y) \in f$ である．

例：$A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$
$R = \{(a, 1), (b, 2)\} \subseteq A \times B$

- $c \in A$ に対して，$(c, y) \in R$ となる $y \in B$ が存在しないので，R は関数ではない．



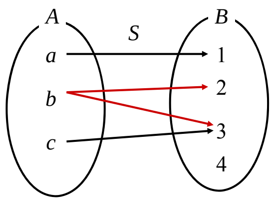
4

関数（続き2）

- 関数 $f : A \to B$
  - $f \subseteq A \times B$，かつ，任意の $x \in A$ に対して，$y \in B$ が唯一存在して，$(x, y) \in f$ である．

例：$A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$
$S = \{(a, 1), (b, 3), (b, 2), (c, 3)\} \subseteq A \times B$

- $b \in A$ に対して，$(b, y) \in S$ となる $y \in B$ は唯一でないので，S は関数ではない．



5

関数（続き3）

- $(x, y) \in f$，$x\, f\, y$　…　$y = f(x)$
- 関数 $f : A \to A$　…　集合 A 上の関数

- $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$，$f : A \to B$
  - $f = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ f(a_1) & \ldots & f(a_n) \end{bmatrix}$

例：$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$
$= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

6

n 変数関数（n-ary function）

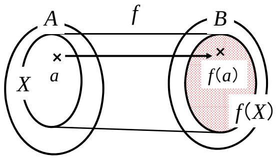
- 集合 A_1, …, A_n から集合 B への n 変数関数
  - $f \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n \times B$,
    かつ，任意の $(x_1, \ldots, x_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n$ 対して，
    $y \in B$ が唯一存在して，$(x_1, \ldots, x_n, y) \in f$ である.
    … $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to B$
- $(x_1, \ldots, x_n, y) \in f$，$y = f((x_1, \ldots, x_n))$
  … $y = f(x_1, \ldots, x_n)$

7

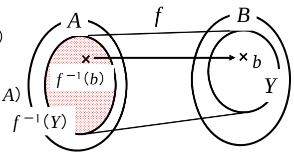
像，逆像

関数 $f : A \to B$ に対して，

- f による $a \in A$ の像（image）（値（value））
  - $f(a)$
  - a　… f の引数（argument）
- f による $b \in B$ の逆像（原像）
  （inverse image）… $f^{-1}(b)$
  - $b = f(a)$ であるような $a \in A$



- f による $X \subseteq A$ の像
  - $f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$　$(\subseteq B)$
- f による $Y \subseteq B$ の逆像（原像）
  - $f^{-1}(Y) = \{ x \mid f(x) \in Y \}$ $(\subseteq A)$



8

定理

集合 X, X_1, $X_2 \subseteq A$,　Y, Y_1, $Y_2 \subseteq B$ と関数 $f : A \to B$ に対して，
次の（1）～（5）が成り立つ.

（1）　$X \subseteq f^{-1}(f(X))$,
　　　$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

（2）　$X_1 \subseteq X_2$ ならば，$f(X_1) \subseteq f(X_2)$
　　　$Y_1 \subseteq Y_2$ ならば，$f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$

（3）　$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$
　　　$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

（4）　$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$
　　　$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

（5）　$f(X_1) - f(X_2) \subseteq f(X_1 - X_2)$
　　　$f^{-1}(Y_1 - Y_2) = f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$

9

証明

集合 $X \subseteq A$,　$Y \subseteq B$ と関数 $f : A \to B$ に対して，
（1）　$X \subseteq f^{-1}(f(X))$,
　　　$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$
- 「任意の $x \in X$ に対して，$x \in f^{-1}(f(X))$」を示す.
- 「任意の $y \in f(f^{-1}(Y))$ に対して，$y \in Y$」を示す.

任意の $x \in X$ に対して，$f(x) \in f(X)$ だから，$x \in f^{-1}(f(X))$.
- $f^{-1}(f(X)) = \{ x \mid f(x) \in f(X) \}$

ゆえに，$X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

一方，任意の $y \in f(f^{-1}(Y))$ に対して，$x \in f^{-1}(Y)$ が存在して，
$y = f(x)$.
$x \in f^{-1}(Y)$ だから，$f(x) \in Y$. すなわち，$y \in Y$.
- $f^{-1}(Y) = \{ x \mid f(x) \in Y \}$

ゆえに，$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

10

証明（続き）

集合 Y_1, $Y_2 \subseteq B$ と関数 $f : A \to B$ に対して，
（3）　$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$
- a）「$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$」と
- b）「$f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$」の両方を示す.
- a）「任意の $x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$ に対して，$x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$」を示す.

---

a）任意の $x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$ に対して，$f(x) \in Y_1 \cup Y_2$.
- $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = \{ x \mid f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \}$

このとき，$f(x) \in Y_1$ または $f(x) \in Y_2$.
ゆえに，$x \in f^{-1}(Y_1)$ または $x \in f^{-1}(Y_2)$ だから，
$x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
- $f^{-1}(Y_1) = \{ x \mid f(x) \in Y_1 \}$，$f^{-1}(Y_2) = \{ x \mid f(x) \in Y_2 \}$

したがって，$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

11

証明（続き2）

集合 Y_1, $Y_2 \subseteq B$ と関数 $f : A \to B$ に対して，
（3）　$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$
- a）「$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$」と
- b）「$f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$」の両方を示す.
- b）「任意の $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$ に対して，$x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$」を示す.

---

b）任意の $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$ に対して，
　$x \in f^{-1}(Y_1)$ または $x \in f^{-1}(Y_2)$.
　ゆえに，$f(x) \in Y_1$ または $f(x) \in Y_2$.
- $f^{-1}(Y_1) = \{ x \mid f(x) \in Y_1 \}$，$f^{-1}(Y_2) = \{ x \mid f(x) \in Y_2 \}$

　このとき，$f(x) \in Y_1 \cup Y_2$ だから，$x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$.
- $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = \{ x \mid f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \}$

　したがって，$f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$.
a），b）から，$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

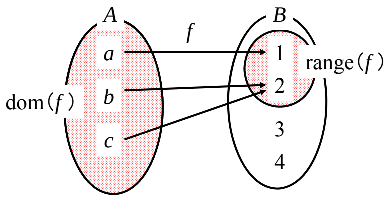
12

関数の定義域，値域

関数 $f: A \to B$に対して，

- fの定義域（domain）
  - $\mathrm{dom}(f) = \{\, x \in A \mid$ ある $y \in B$ に対して，$y = f(x) \,\}$
- fの値域（range）
  - $\mathrm{range}(f) = \{\, y \in B \mid$ ある $x \in A$ に対して，$y = f(x) \,\}$
    （$= \{\, f(x) \mid x \in A \,\} = f(A)$ ）

例：

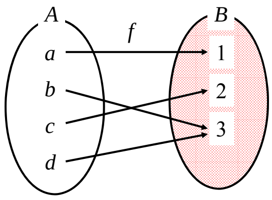


13

全射（surjection）

- 関数 $f: A \to B$ は全射である
  （上への関数（onto function）である）
  - 任意の $y \in B$ に対して，ある $x \in A$ が存在して，$y = f(x)$.

例： $A = \{\, a, b, c, d \,\}$, $B = \{\, 1, 2, 3 \,\}$
$f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 3)\}$

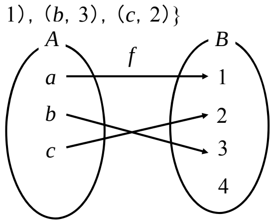


14

単射（injection）

- 関数 $f: A \to B$ は単射である
  （1対1関数（one-to-one function）である）
  - 任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$.
    - 任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して，$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$.

例： $A = \{\, a, b, c \,\}$, $B = \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}$
$f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\}$

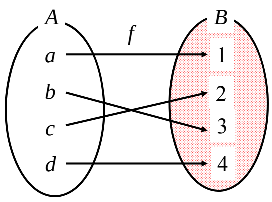


15

全単射（bijection）

- 関数 $f: A \to B$ は全単射である
  - fは全射かつ単射である

例： $A = \{\, a, b, c, d \,\}$, $B = \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}$
$f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 4)\}$

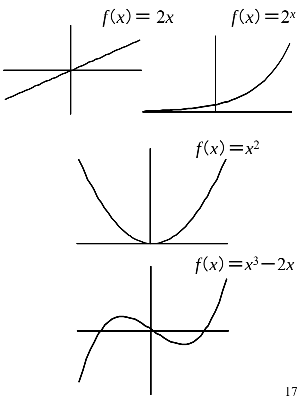


16

全射，単射，全単射（続き）

$\mathbf{R}$ … すべての実数からなる集合

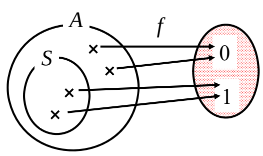
- 例1： $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x$
  - f は全単射である.
- 例2： $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x$
  - f は単射であるが，全射ではない.
- 例3： $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$
  - f は単射でなく，全射でもない.
- 例4： $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 2x$
  - f は単射でないが，全射である.



17

全射，単射，全単射（続き2）

- 例： 集合 A
  $S \subseteq A$, $|A| \geq 3$, $S \neq \phi$, $A - S \neq \phi$
  $f: A \to \{\, 0, 1 \,\}$,
  $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in S) \\ 0 & (x \notin S) \end{cases}$
  - f は単射でないが，全射である.



18

置換（permutation）

- 有限集合 A 上の置換
  - A 上の全単射

例：$A=\{1, 2, 3\}$

- $f_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，　$f_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

- $|A|=n$ ならば，A 上の置換は $n!$ 個ある．
  - A 上の置換の個数は A 上の順列の個数に等しい．

19

恒等関数（identity function）

- 集合 A 上の恒等関数 I_A
  - 任意の $x\in A$ に対して，$I_A(x)=x$.

例：$A=\{1, 2, 3\}$

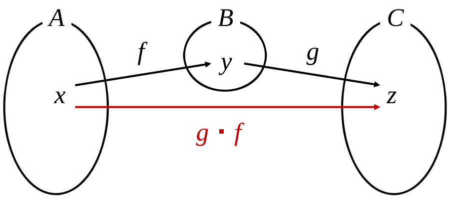
- $I_A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

- 有限集合 A 上の恒等関数 I_A は A 上の置換である．

20

関数の合成（composition）

- 関数 $f:A\to B$ と関数 $g: B\to C$ の合成関数 $g\cdot f:A\to C$
  - 任意の $x\in A$ に対して，$(g\cdot f)(x)=g(f(x))$



21

定理

関数 $f: A\to B$，$g: B\to C$，$h: C\to D$ に対して，

$(h\cdot g)\cdot f=h\cdot(g\cdot f)$

（関数の合成に関する結合則）

が成り立つ．

22

定理

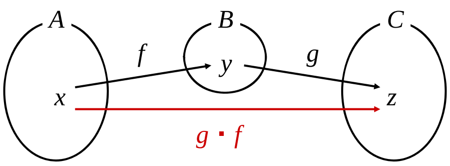
関数 $f:A\to B$，$g: B\to C$ に対して，次の（1）～（4）が成り立つ．

（1）f, g がともに全射であるならば，$g\cdot f$ も全射である．

（2）f, g がともに単射であるならば，$g\cdot f$ も単射である．

（3）$g\cdot f$ が全射であるならば，g も全射である．

（4）$g\cdot f$ が単射であるならば，f も単射である．



23

証明

関数 $f:A\to B$，$g: B\to C$ に対して，

（1）f, g がともに全射であるならば，$g\cdot f$ も全射である．

- $g\cdot f:A\to C$
- 「任意の $z\in C$ に対して，ある $x\in A$ が存在して，$z=(g\cdot f)(x)$」を示す．

---

g は全射だから，任意の $z\in C$ に対して，ある $y\in B$ が存在して，$g(y)=z$.

また，f は全射だから，任意の $u\in B$ に対して，ある $x\in A$ が存在して，$f(x)=u$.

特に，$y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が存在して，$f(x)=y$.

すなわち，任意の $z\in C$ に対して，ある $x\in A$ が存在して，$(g\cdot f)(x)=g(f(x))=z$ だから，$g\cdot f$ は全射である．

24

証明(続き)

関数 $f: A\to B$, $g: B\to C$ に対して,

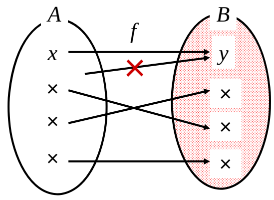
(2) f, g がともに単射であるならば, $g\cdot f$ も単射である.

- $g\cdot f: A\to C$
- 「任意の x_1, $x_2\in A$ に対して, $(g\cdot f)(x_1)=(g\cdot f)(x_2)$ ならば $x_1=x_2$」を示す.

任意の x_1, $x_2\in A$ に対して, $(g\cdot f)(x_1)=(g\cdot f)(x_2)$ とする.
このとき, $g(f(x_1))=g(f(x_2))$.
g は単射だから, $f(x_1)=f(x_2)$.
さらに, f は単射だから, $x_1=x_2$.
したがって, $g\cdot f$ は単射である.

定理

関数 $f: A\to B$ が全単射であるとき, かつそのときに限り,
任意の $y\in B$ に対して, ある $x\in A$ が唯一存在して,
$y=f(x)$ である.



証明

関数 $f: A\to B$ が全単射であるとき, かつそのときに限り,
任意の $y\in B$ に対して, ある $x\in A$ が唯一存在して, $y=f(x)$ である.

- a)「f が全単射であるならば, 任意の $y\in B$ に対して, ある $x\in A$ が唯一存在して, $y=f(x)$」と
- b)「任意の $y\in B$ に対して, ある $x\in A$ が唯一存在して, $y=f(x)$ ならば, f は全単射である」の両方を示す.
  - a-1)「f は全単射である」を仮定して, 「任意の $y\in B$ に対して, ある $x\in A$ が存在して, $y=f(x)$」を示す.
  - a-2)「任意の$y\in B$に対して, $y=f(x)$となる $x\in A$は唯一である」を示す.
    - 「任意の$y\in B$に対して, $y=f(x)$となる $x\in A$は2つ存在する」を仮定して, 矛盾を導く.

---

a)　f は全単射であると仮定する.
a-1) f は全射だから, 任意の $y\in B$ に対して, ある $x\in A$ が存在して, $y=f(x)$.

証明(続き)

関数 $f: A\to B$ が全単射であるとき, かつそのときに限り,
任意の $y\in B$ に対して, ある $x\in A$ が唯一存在して, $y=f(x)$ である.

- a)「f が全単射であるならば, 任意の $y\in B$ に対して, ある $x\in A$ が唯一存在して, $y=f(x)$」を示す.
  - a-2)「f は全単射である」を仮定して, 「任意の$y\in B$に対して, $y=f(x)$となる $x\in A$は唯一である」を示す.
    - 「任意の$y\in B$に対して, $y=f(x)$となる $x\in A$は2つ存在する」を仮定して, 矛盾を導く.

---

a)　f は全単射であると仮定する.
a-2) 任意の $y\in B$ に対して, $y=f(x_1)$ かつ $y=f(x_2)$ $(x_1\neq x_2)$ と仮定する.
ところが, f は単射だから, $f(x_1)\neq f(x_2)$.
これは, $y=f(x_1)=f(x_2)$ に矛盾する.
ゆえに, 任意の$y\in B$に対して, $y=f(x)$となる $x\in A$は唯一である.

証明(続き2)

関数 $f: A\to B$ が全単射であるとき, かつそのときに限り,
任意の $y\in B$ に対して, ある $x\in A$ が唯一存在して, $y=f(x)$ である.

- b)「任意の $y\in B$ に対して, ある $x\in A$ が唯一存在して, $y=f(x)$ ならば, f は全単射である」を示す.
  - b-1)「f は全射である」と
  - b-2)「f は単射である」を示す.
  - b-1)「任意の $y\in B$ に対して, ある $x\in A$ が存在して, $y=f(x)$」を示す.
  - b-2)「任意の x_1, $x_2\in A$ に対して, $f(x_1)=f(x_2)$ ならば $x_1=x_2$」を示す.

---

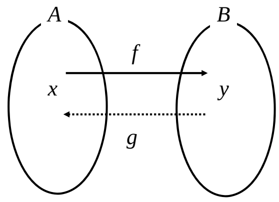
b)　任意の $y\in B$ に対して, ある $x\in A$ が唯一存在して, $y=f(x)$ と仮定する.
b-1) このとき, 明らかに f は全射である.
b-2) 任意の x_1, $x_2\in A$ に対して, $f(x_1)=f(x_2)=y$ とする.
このとき, $y\in B$ に対して, $y=f(x)$ となる $x\in A$ は唯一存在するから,
$x_1=x_2$. ゆえに, f は単射である.
a), b) から, f は全単射である.

定理

関数 $f: A\to B$ が全単射であるとき, かつそのときに限り,

$$g\cdot f = I_A \quad かつ \quad f\cdot g = I_B$$

を満たす関数 $g: B\to A$ は唯一存在する.



逆関数（inverse function）

- 関数 $g:B\to A$ は関数 $f:A\to B$ の逆関数である
  - $g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$
  - $f:A\to B$ の逆関数 … $f^{-1}: B\to A$
  - $x\in A$, $y\in B$に対して，$f^{-1}(y)=x$ iff $f(x)=y$
- 逆関数は逆関係である．
- 関数 f の逆関係 f^{-1}は，一般には関数ではない．
  - f が全単射であるとき，かつそのときに限り，逆関係 f^{-1}は f の唯一の逆関数である．

31

証明

関数 $f:A\to B$ が全単射であるとき，かつそのときに限り，$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす関数 g: $B\to A$は唯一存在する．

- a) 「f が全単射であるならば，$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす $g:B\to A$ が唯一存在する」と
- b) 「$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす関数 $g:B\to A$ が唯一存在するならば，f は全単射である」の両方を示す．
  - a-1)「f は全単射である」を仮定して，「$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす g が存在する」を示す．
  - a-2)「$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす g は唯一である」を示す．

32

証明（続き）

a) 「f が全単射であるならば，$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす g は唯一存在する」を示す．

- a-1)「f は全単射である」を仮定して，「$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす g が存在する」を示す．
- a-2)「$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす g は唯一である」を示す．

---

a)　f は全単射であると仮定する．

a-1) このとき，任意の $y\in B$ に対して，$x\in A$ が唯一存在して，$y=f(x)$．
そこで，関数 $g:B\to A$ を $g(y)=x$ と定義する．
このとき，$(f\cdot g)(y)=f(g(y))=f(x)=y$ だから，$f\cdot g=I_B$．
また，任意の $x\in A$ に対して，$y=f(x)$とおくと，
$(g\cdot f)(x)=g(f(x))=g(y)=x$ だから，$g\cdot f=I_A$．

33

証明（続き2）

a) 「f が全単射であるならば，$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす g は唯一存在する」を示す．

- a-1)「f は全単射である」を仮定して，「$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす g が存在する」を示す．
- a-2)「$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす g は唯一である」を示す．
  - 「$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす g は2つある」と仮定して，矛盾を導く．

---

a)　f は全単射であると仮定する．

a-2) $g_1\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g_1 = I_B$，$g_2\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g_2 = I_B$とする．
任意の $y\in B$ に対して，
$y= I_B(y)=(f\cdot g_1)(y)= f(g_1(y))$，
$y= I_B(y)=(f\cdot g_2)(y)= f(g_2(y))$．
ゆえに，$f(g_1(y))= f(g_2(y))$．
f は単射だから，$g_1(y)= g_2(y)$．ゆえに，$g_1= g_2$．
すなわち，$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす g は唯一である．

34

証明（続き3）

b) 「$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす関数 $g:B\to A$ が唯一存在するならば，f は全単射である」を示す．

- 「$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす関数 g が唯一存在する」を仮定して，「f は全単射である」を示す．
  - b-1)「任意の $y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が存在して，$y=f(x)$」を示す．
  - b-2)「任意の x_1, $x_2\in A$ に対して，$f(x_1)= f(x_2)$ならば $x_1=x_2$」を示す．

---

b)　$g\cdot f = I_A$ かつ $f\cdot g = I_B$ を満たす関数 g が唯一存在すると仮定する．

b-1) このとき，任意の $y\in B$ に対して，$f(g(y))=(f\cdot g)(y)= I_B(y)=y$．
$g(y)=x$ とおくと，$y=f(x)$であり，$x\in A$．
ゆえに，f は全射である．

b-2) 任意の x_1, $x_2\in A$ に対して，$f(x_1)= f(x_2)$と仮定する．
ところで，　$x_1= I_A(x_1)=(g\cdot f)(x_1)= g(f(x_1))$，
$x_2= I_A(x_2)=(g\cdot f)(x_2)= g(f(x_2))$
$g(f(x_1))= g(f(x_2))$だから，$x_1=x_2$．
ゆえに，f は単射である．

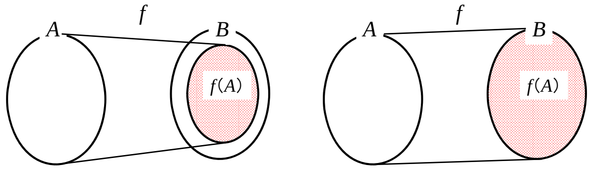
35

定理

関数 $f:A\to B$ に対して，次の(1)，(2)が成り立つ．

(1)　f が単射であるならば，逆関係 f^{-1}は $f(A)$から A への逆関数であり，しかも単射である．

(2)　f が全単射であるならば，逆関係 f^{-1}は B から A への逆関数であり，しかも全単射である．



36

定理

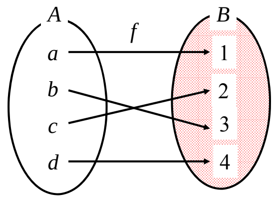
全単射 $f : A \to B$, $g : B \to C$ に対して,

$$(g \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}$$

が成り立つ.

定理

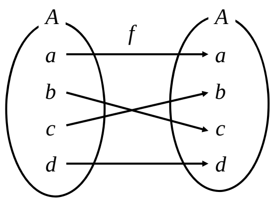
有限集合 A から有限集合 B への全単射が存在するならば, $|A| = |B|$.



定理

有限集合 A 上の関数 f について, 次の(1)～(3)は同値である.

(1) f は全射である.
(2) f は単射である.
(3) f は全単射である.



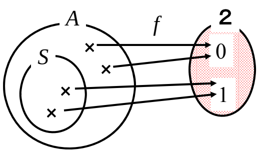
関数の集合

集合 A, B に対して,

- $B^A = \{ f \mid f : A \to B \}$
  - 集合 A から集合 B へのすべての関数からなる集合（集合 A から集合 B への配置集合）
- 有限集合 A, B に対して, $|B^A| = |B|^{|A|}$

特性関数（characteristic function）

$B^A = \{ f \mid f : A \to B \}$



- $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ とおくと,
  $\mathbf{2}^A = \{ f \mid f : A \to \{0, 1\} \}$
- $S = \{ x \in A \mid f(x) = 1 \}$ とおくと,
  $x \in S \subseteq A$ iff $f(x) = 1$
  - f が決まれば S も決まる. 逆に, S が決まれば f も決まる.
  - f と S を同一視することができる.
- $\mathbf{2}^A = \{ S \mid S \subseteq A \}$
  $= \boldsymbol{P}(A)$
- $f : A \to \{0, 1\}$
  … 集合 S の特性関数(characteristic function)
- $f : A \to [0, 1]$
  … 集合 S の所属関数(membership function)
  - ファジー(fuzzy)集合

まとめ

- 今回の講義
  - 関数
- 次回の講義
  - 約数・倍数(教科書　pp.101-106, 113-116)
- 今回の演習
  - 半順序