

離散数学及び演習 講義 4 2016. 5.12(木)

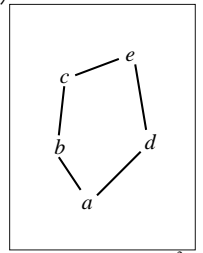
東
(教科書 pp.16-19)

半順序 (partial order) (復習)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の半順序である
 - R は反射的, 反対称的, かつ推移的である
- $x R y \dots x \leq_R y, x \sqsubseteq_R y$
(R の意味で y は x より大きい)
- 教科書では半順序のことを単に順序と表現している.

例: $A = \{ a, b, c, d, e \}$
 $R = \{ (a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, c), (b, e), (c, c), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e) \}$

- R は反射的, 反対称的, かつ推移的だから, R は半順序である

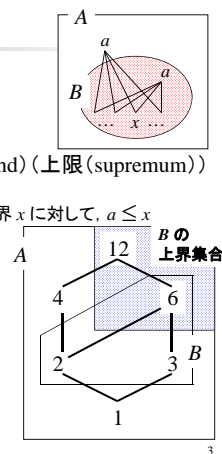


上界, 上限 (復習)

- 半順序集合 (A, \leq) , $B \subseteq A$ に対して,
- $a \in A$ は B の上界 (upper bound) である
 - 任意の $x \in B$ に対して, $x \leq a$
 - $a \in A$ は B の最小上界 (least upper bound) (上限 (supremum)) である $\dots a = \text{lub } B, \text{ sup } B$
 - a は B の上界であり, かつ, B の任意の上界 x に対して, $a \leq x$

例: (A, \leq) : 右図, $B = \{ 2, 3, 6 \}$

- B の上界 $\dots 6, 12$
- B の上限 $\dots 6$
- 上限は上界の最小元である

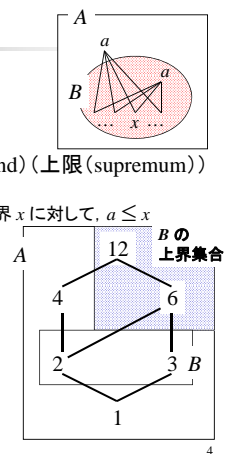


上界, 上限 (続き)

- 半順序集合 (A, \leq) , $B \subseteq A$ に対して,
- $a \in A$ は B の上界 (upper bound) である
 - 任意の $x \in B$ に対して, $x \leq a$
 - $a \in A$ は B の最小上界 (least upper bound) (上限 (supremum)) である $\dots a = \text{lub } B, \text{ sup } B$
 - a は B の上界であり, かつ, B の任意の上界 x に対して, $a \leq x$

例: (A, \leq) : 右図, $B = \{ 2, 3 \}$

- B の上界 $\dots 6, 12$
- B の上限 $\dots 6 (\notin B)$
- 上限は上界の最小元である

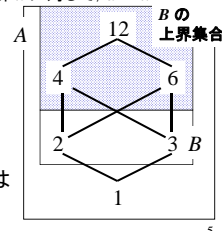


上界, 上限 (続き2)

- 半順序集合 (A, \leq) , $B \subseteq A$ に対して,
- $a \in A$ は B の上界 (upper bound) である
 - 任意の $x \in B$ に対して, $x \leq a$
 - $a \in A$ は B の最小上界 (least upper bound) (上限 (supremum)) である $\dots a = \text{lub } B, \text{ sup } B$
 - a は B の上界であり, かつ, B の任意の上界 x に対して, $a \leq x$

例: (A, \leq) : 右図, $B = \{ 2, 3 \}$

- B の上界 $\dots 4, 6, 12$
- B の上限 \dots なし
- 上限は上界の最小元である
- 上界が存在しても, 上限が存在するとは限らない.

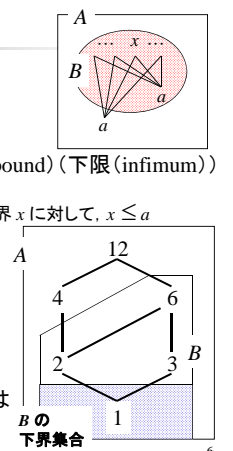


下界, 下限 (復習)

- 半順序集合 (A, \leq) , $B \subseteq A$ に対して,
- $a \in A$ は B の下界 (lower bound) である
 - 任意の $x \in B$ に対して, $a \leq x$
 - $a \in A$ は B の最大下界 (greatest lower bound) (下限 (infimum)) である $\dots a = \text{glb } B, \text{ inf } B$
 - a は B の下界であり, かつ, B の任意の下界 x に対して, $x \leq a$

例: (A, \leq) : 右図, $B = \{ 2, 3, 6 \}$

- B の下界 $\dots 1$
- B の下限 $\dots 1$
- 下限は下界の最大元である
- 下界が存在しても, 下限が存在するとは限らない.



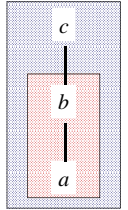
束 (lattice)

- 半順序集合 (A, \leq) は完備 (complete) である
 - A の任意の部分集合 B に対して, B の上限と下限が存在する.
- 半順序集合 (L, \leq) は束 (lattice) である
 - L の任意の有限部分集合 B に対して, B の上限と下限が存在する.
 - 完備半順序集合は束であるが, 束は完備であるとは限らない.
- 束 (L, \leq) は完備束 (complete lattice) である
 - (L, \leq) は完備である.
- 束 L
 - 半順序 \leq が明らかな場合は, 単に, 束 L という.

7

束 (続き)

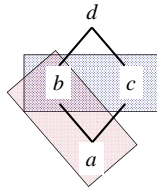
- 半順序集合 (L, \leq) は束 (lattice) である
 - L の任意の有限部分集合 B に対して, B の上限と下限が存在する.
- 例: $(\{a, b, c\}, \leq)$: 右図
 - $\sup \emptyset = a, \quad \inf \emptyset = c,$
 - $\sup \{a\} = a, \quad \inf \{a\} = a,$
 - $\sup \{b\} = b, \quad \inf \{b\} = b,$
 - $\sup \{c\} = c, \quad \inf \{c\} = c,$
 - $\sup \{a, b\} = b, \quad \inf \{a, b\} = a,$
 - $\sup \{a, c\} = c, \quad \inf \{a, c\} = a,$
 - $\sup \{b, c\} = c, \quad \inf \{b, c\} = b,$
 - $\sup \{a, b, c\} = c, \quad \inf \{a, b, c\} = a$
 - ゆえに, L は束である.



8

束 (続き2)

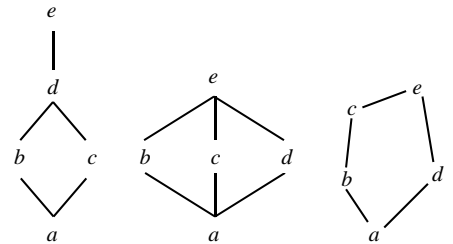
- 半順序集合 (L, \leq) は束 (lattice) である
 - L の任意の有限部分集合 B に対して, B の上限と下限が存在する.
- 例: $(\{a, b, c, d\}, \leq)$: 右図
 - $\sup \emptyset = a, \quad \inf \emptyset = d,$
 - $\sup \{a\} = a, \quad \inf \{a\} = a,$
 - ...
 - $\sup \{a, b\} = b, \quad \inf \{a, b\} = a,$
 - ...
 - $\sup \{b, c\} = d, \quad \inf \{b, c\} = a,$
 - $\sup \{a, b, c\} = d, \quad \inf \{a, b, c\} = a,$
 - ...
 - $\sup \{a, b, c, d\} = d, \quad \inf \{a, b, c, d\} = a$
 - ゆえに, L は束である.



9

束 (続き3)

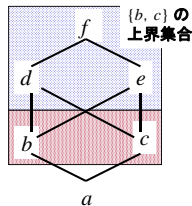
- 半順序集合 (L, \leq) は束 (lattice) である
 - L の任意の有限部分集合 B に対して, B の上限と下限が存在する.
- 例: 以下はどれも束である.



10

束 (続き4)

- 半順序集合 (L, \leq) は束 (lattice) である
 - L の任意の有限部分集合 B に対して, B の上限と下限が存在する.
- 例: (L, \leq) : 右図
 - $\sup \{b, c\}$ は存在しない.
 - ゆえに, L は束ではない.



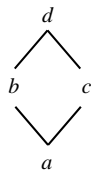
11

定理

半順序集合 (A, \leq) は束であるとき, かつそのときに限り, 任意の $x, y \in A$ に対して, $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する.

- 例: (A, \leq) : 右図

	上限				下限				
+	a	b	c	d	·	a	b	c	d
a	a	b	c	d	a	a	a	a	a
b	b	b	d	d	b	a	b	a	b
c	c	c	c	d	c	a	a	c	c
d	d	d	d	d	d	a	b	c	d



- 任意の $x, y \in A$ に対して, $\{x, y\}$ の上限と下限が存在するので, A は束である.

12

証明

半順序集合 (A, \leq) は束であるとき、かつそのときに限り、任意の $x, y \in A$ に対して、 $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する。

- a) 「 A が束であるならば、任意の $x, y \in A$ に対して、 $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」と
- b) 「任意の $x, y \in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在するならば、 A は束である」の両方を示す。

a) A が束であると仮定すると、 A の任意の有限部分集合 B に対して、 B の上限と下限が存在する。

特に、 $\{x, y\} \subseteq A$ に対して、 $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する。

13

証明(続き)

半順序集合 (A, \leq) は束であるとき、かつそのときに限り、任意の $x, y \in A$ に対して、 $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する。

- b) 「任意の $x, y \in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在するならば、 A は束である」を示す。
- b) 「任意の $x, y \in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して、
「 A の任意の有限部分集合 $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ に対して、 A_n の上限と下限が存在する」を示す。
- b) n に関する帰納法により、「 A_n の上限と下限が存在する」を示す。
 - b-1) (基底段階) 「 $A_1 = \{a_1\}$ の上限と下限が存在する」を示す。
 - b-2) (帰納段階) 「 $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して、
「 $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限と下限が存在する」を示す。

14

証明(続き2)

b) 任意の $x, y \in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在するならば、 A は束である。

- 「任意の $x, y \in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して、 n に関する帰納法により、
「 A の任意の有限部分集合 $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ に対して、 A_n の上限と下限が存在する」を示す。
 - b-1) (基底段階) 「 $A_1 = \{a_1\}$ の上限と下限が存在する」を示す。

b-1) (基底段階) $A_1 = \{a_1\}$ の上限と下限はともに a_1 である。

15

証明(続き3)

b) 任意の $x, y \in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在するならば、 A は束である。

- 「任意の $x, y \in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して、 n に関する帰納法により、
「 A の任意の有限部分集合 $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ に対して、 A_n の上限と下限が存在する」を示す。
 - b-2) (帰納段階) 「 $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して、
「 $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限と下限が存在する」を示す。
 - b-2-1) 「 $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限が存在する」と
 - b-2-2) 「 $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ の下限が存在する」の両方を示す。
 - b-2-1-1) 「 A_{k+1} の上界 u が存在する」を示す。
・ 「任意の $a_i \in A_{k+1}$ に対して、 $a_i \leq u$ 」を示す。
 - b-2-1-2) 「 u は A_{k+1} の最小上界である」を示す。

16

証明(続き4)

- b-2) (帰納段階) 「 $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して、
 - b-2-1) 「 $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限が存在する」を示す。
 - b-2-1-1) 「 A_{k+1} の上界 u が存在する」を示す。
・ 「任意の $a_i \in A_{k+1}$ に対して、 $a_i \leq u$ 」を示す。

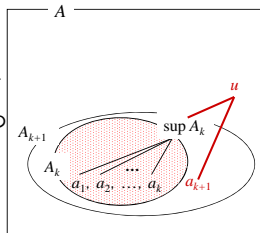
b-2) $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq A$ の上限 $\sup A_k$ が存在すると仮定する(帰納法の仮定)。

このとき、 $\sup A_k \in A$ 、
かつ、 $a_i \leq \sup A_k$ ($i=1, 2, \dots, k$)。

b-2-1-1) $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\} \subseteq A$ とする。
任意の $x, y \in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限が存在するから、特に、 $\{\sup A_k, a_{k+1}\}$ の上限 u も存在する。

このとき、 $a_i \leq \sup A_k \leq u$ ($i=1, 2, \dots, k$)、
かつ、 $a_{k+1} \leq u$ 。

ゆえに、 u は A_{k+1} の上界である。



証明(続き5)

- b-2) (帰納段階) 「 $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して、
 - b-2-1) 「 $A_{k+1} = \{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限が存在する」を示す。
 - b-2-1-2) 「 u は A_{k+1} の最小上界である」を示す。
・ 「 A_{k+1} の任意の上界 u' に対して、 $u \leq u'$ 」を示す。

b-2-1-2) $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ の任意の上界 u' に対して、 $a_i \leq u'$ ($i=1, 2, \dots, k, k+1$)。

$A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq A_{k+1}$ だから、

u' は A_k の上界でもある。

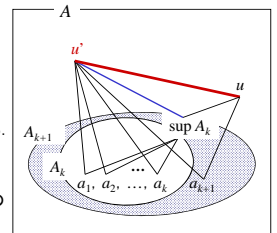
ゆえに、 $\sup A_k \leq u'$ 。

u' は A_{k+1} の上界だから、 $a_{k+1} \leq u'$ 。

ゆえに、 u' は $\{\sup A_k, a_{k+1}\}$ の上界である。

ところが、b-2-1-1) から、 A_{k+1} の上界 u は $\{\sup A_k, a_{k+1}\}$ の上限だから、 $u \leq u'$ 。

b-2-1) ゆえに、 $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限は存在する。



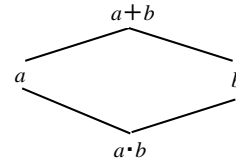
証明(続き6)

- b) 任意の $x, y \in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在するならば, A は束である.
- b) 「任意の $x, y \in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して, 「 A の任意の有限部分集合 A_n に対して, A_n の上限と下限が存在する」を示す.
 - b-1) (基底段階) 「 $A_1 = \{a_1\}$ の上限と下限が存在する」を示す.
 - b-2) (帰納段階) 「 $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して, $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限と下限が存在する」を示す.
 - b-2-1) 「 $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限が存在する」と
 - b-2-2) 「 $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ の下限が存在する」の両方を示す.
-
- b-2-2) 同様に, A_{k+1} の下限が存在することを示せる.
- b-2) ゆえに, A_{k+1} の上限と下限は存在する.
- b) 以上から, A の任意の有限部分集合 A_n の上限と下限は存在する. ゆえに, A は束である.

19

結び, 交わり

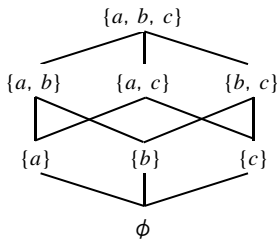
- 束 L に対して,
- $a, b \in L$ の結び(join) $\dots a+b, a \cup b$
 - $\{a, b\}$ の上限 ($\sup \{a, b\}$)
 - $a, b \in L$ の交わり(meet) $\dots a \cdot b, a \cap b$
 - $\{a, b\}$ の下限 ($\inf \{a, b\}$)



20

結び, 交わり(続き)

- 例: 半順序集合 $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$
 $A, B \in \mathcal{P}(\{a, b, c\}) \quad (A, B \subseteq \{a, b, c\})$
- 結び $A+B = \sup\{A, B\} = A \cup B$
 - 交わり $A \cdot B = \inf\{A, B\} = A \cap B$



21

定理

- 束 L と任意の $a, b, c, d \in L$ に対して, 次の(1)~(4)が成り立つ.
- (1) $a \leq b$ ならば, $a+c \leq b+c, a \cdot c \leq b \cdot c$
 - (2) $a \leq b$ かつ $c \leq d$ ならば, $a+c \leq b+d, a \cdot c \leq b \cdot d$
 - (3) $(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq a \cdot (b+c)$
 - (4) $a + (b \cdot c) \leq (a+b) \cdot (a+c)$

22

証明

- (1) $a \leq b$ ならば, $a+c \leq b+c$
- $a+c$ は $\{a, c\}$ の上限(最小上界)
 - $b+c$ は $\{a, c\}$ の上界であることを示す.

明らかに, $b \leq b+c$ かつ $c \leq b+c$.
 $a \leq b$ であり, \leq は推移的だから, $a \leq b+c$.
 ゆえに, $b+c$ は $\{a, c\}$ の上界である.
 ところが, $a+c$ は $\{a, c\}$ の上限だから, $a+c \leq b+c$.

23

定理

- 束 L と任意の $x, y \in L$ に対して, 次の(1)~(3)は互いに同値である.
- (1) $x \leq y$
 - (2) $x+y = y$
 - (3) $x \cdot y = x$

24

証明

束 L と任意の $x, y \in L$ に対して、次の (1) ~ (3) は互いに同値である。

- (1) $x \leq y$ (2) $x + y = y$ (3) $x \cdot y = x$
- a) 「(1)と(2)は同値である」と
 - b) 「(1)と(3)は同値である」の両方を示す。
 - a-1) 「(1)が成り立つならば、(2)も成り立つ」と
 - a-2) 「(2)が成り立つならば、(1)も成り立つ」を示す。

a-1) (1)が成り立つと仮定する。

このとき、明らかに、 y は $\{x, y\}$ の上界である。
 そこで、 u を $\{x, y\}$ の任意の上界とすると、 $y \leq u$ 。
 ゆえに、 y は $\{x, y\}$ の最小上界(上限)である。
 したがって、(2)が成り立つ。

25

証明(続き)

束 L と任意の $x, y \in L$ に対して、次の (1) ~ (3) は互いに同値である。

- (1) $x \leq y$ (2) $x + y = y$ (3) $x \cdot y = x$
- a) 「(1)と(2)は同値である」と
 - b) 「(1)と(3)は同値である」の両方を示す。
 - a-1) 「(1)が成り立つならば、(2)も成り立つ」と
 - a-2) 「(2)が成り立つならば、(1)も成り立つ」を示す

a-2) (2)が成り立つと仮定する。

このとき、 $x \leq x + y = y$ だから、(1)が成り立つ。

b) 同様に証明できる。

26

定理

束 L と任意の $x, y, z \in L$ に対して、次の (1) ~ (4) が成り立つ。

- (1) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$ (交換則(commutative law))
- (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (結合則(associative law))
- (3) $x + (x \cdot y) = x$, $x \cdot (x + y) = x$ (吸収則(absorptive law))
- (4) $x + x = x$, $x \cdot x = x$ (冪等則(idempotent law))

27

証明

- (1) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$
- (4) $x + x = x$, $x \cdot x = x$
- +, \cdot の定義から明らか。
- (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- $x + (y + z)$ は $\{x + y, z\}$ の上限であることを示す。
 - a) 「 $x + (y + z)$ は $\{x + y, z\}$ の上界である」を示す。
 - 「 $x + y \leq x + (y + z)$, $z \leq x + (y + z)$ 」を示す。
 - b) 「 $x + (y + z)$ は $\{x + y, z\}$ の最小上界である」を示す。
 - 「 $\{x + y, z\}$ の任意の上界 u' に対して、 $x + (y + z) \leq u'$ 」を示す。

$x + (y + z) = u$ とおく。

a) u は $\{x, y + z\}$ の上限だから、 $x \leq u$, $y + z \leq u$ 。

ゆえに、 $y \leq u$, $z \leq u$ 。

したがって、 u は $\{x, y\}$ の上界であり、 $x + y \leq u$ 。

以上から、 u は $\{x + y, z\}$ の上界である。

28

証明(続き)

- (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- $x + (y + z)$ は $\{x + y, z\}$ の上限であることを示す。
 - a) 「 $x + (y + z)$ は $\{x + y, z\}$ の上界である」を示す。
 - 「 $x + y \leq x + (y + z)$, $z \leq x + (y + z)$ 」を示す。
 - b) 「 $x + (y + z)$ は $\{x + y, z\}$ の最小上界である」を示す。
 - 「 $\{x + y, z\}$ の任意の上界 u' に対して、 $x + (y + z) \leq u'$ 」を示す。

$x + (y + z) = u$ とおく。

b) u' を $\{x + y, z\}$ の任意の上界とする。

このとき、 $x + y \leq u'$, $z \leq u'$ 。さらに、 $x \leq u'$, $y \leq u'$ 。

ゆえに、 u' は $\{y, z\}$ の上界であり、 $y + z \leq u'$ 。

したがって、 u' は $\{x, y + z\}$ の上界である。

ところが、 u は $\{x, y + z\}$ の上限だから、 $u \leq u'$ 。

a) から、 u は $\{x + y, z\}$ の上界だから、 u は $\{x + y, z\}$ の上限である。

29

定理

半順序集合 (A, \leq) が束であるならば、 (A, \leq) は交換則、結合則、吸収則、および、

$$x \leq y \text{ iff } x + y = y$$

を満たす。

- P iff Q (P if and only if Q)
 - Q であるとき、かつそのときに限り、P である
 - P と Q は必要十分

前の2つの定理から明らか。

30

定理

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y, x \cdot y$ が定義されるとき, それらが吸収則を満たすならば, 冪等則も満たす.

- (3) $x + (x \cdot y) = x,$
 $x \cdot (x + y) = x$ (吸収則 (absorptive law))
- (4) $x + x = x,$
 $x \cdot x = x$ (冪等則 (idempotent law))
- $x+y, x \cdot y$ が定義される
 - 任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y, x \cdot y \in A$ がそれぞれ一意に定まる.

31

証明

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y, x \cdot y$ が定義されるとき, それらが吸収則を満たすならば, 冪等則も満たす.

- 吸収則「 $x + (x \cdot y) = x, x \cdot (x + y) = x$ 」を仮定して, 冪等則「 $x + x = x, x \cdot x = x$ 」を示す.

吸収則が成り立つと仮定する.

任意の $x, y \in A$ に対して, $x + (x \cdot y) = x$ だから,

特に, y の代わりに $x+y$ を用いると, $x + (x \cdot (x+y)) = x.$

$x \cdot (x+y) = x$ だから, $x + x = x.$

同様に, $x \cdot x = x.$

32

定理

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y, x \cdot y$ が定義され, かつ, それらは交換則, 結合則, 吸収則を満たすとする. このとき,

$$x \leq y \text{ iff } x+y=y$$

と定義すれば, (A, \leq) は束である.

- 代数系 (集合とその上での演算の組) としての束
- 演算 $+$ から半順序 \leq を定義

33

証明

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y, x \cdot y$ が定義され, かつ, それらは交換則, 結合則, 吸収則を満たすとする. このとき,

$$x \leq y \text{ iff } x+y=y$$

と定義すれば, (A, \leq) は束である.

- a) 「 (A, \leq) は半順序集合である」を示す.
- b) 「任意の $x, y \in A$ に対して, $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」を示す.
 - 半順序集合 (A, \leq) は束であるとき, かつそのときに限り, 任意の $x, y \in A$ に対して, $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する.
- a-1) 「 \leq は反射的である」を示す.
- a-2) 「 \leq は反対称的である」を示す.
- a-3) 「 \leq は推移的である」を示す.

34

証明 (続き)

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y, x \cdot y$ が定義され, かつ, それらは交換則, 結合則, 吸収則を満たすとする. このとき,

$$x \leq y \text{ iff } x+y=y$$

と定義すれば, (A, \leq) は束である.

- a) 「 (A, \leq) は半順序集合である」を示す.
 - a-1) 「 \leq は反射的である」を示す.
 - a-1) 「任意の $x \in A$ に対して, $x \leq x$ 」を示す.
 - a-1) 「任意の $x \in A$ に対して, $x+x=x$ 」を示す.

a-1) 集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, 吸収則が成り立つから,

冪等則も成り立つ.

任意の $x \in A$ に対して, 冪等則から, $x+x=x.$

ゆえに, $x \leq x$ だから, \leq は反射的である.

35

証明 (続き2)

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y, x \cdot y$ が定義され, かつ, それらは交換則, 結合則, 吸収則を満たすとする. このとき,

$$x \leq y \text{ iff } x+y=y$$

と定義すれば, (A, \leq) は束である.

- a) 「 (A, \leq) は半順序集合である」を示す.
 - a-2) 「 \leq は反対称的である」を示す.
 - a-2) 「任意の $x, y \in A$ に対して, $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば, $x=y$ 」を示す.

a-2) 任意の $x, y \in A$ に対して, $x \leq y$ かつ $y \leq x$ と仮定する.

このとき, $x+y=y$ かつ $y+x=x.$

交換則から, $x+y=y+x$ だから, $x=y.$

ゆえに, \leq は反対称的である.

36

証明(続き3)

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y, x \cdot y$ が定義され, かつ, それらは交換則, 結合則, 吸収則を満たすとする. このとき,

$$x \leq y \text{ iff } x+y=y$$

と定義すれば, (A, \leq) は束である.

- a) 「 (A, \leq) は半順序集合である」を示す.
 - a-3) 「 \leq は推移的である」を示す.
 - a-3) 「任意の $x, y, z \in A$ に対して, $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば, $x \leq z$ 」を示す.

a-3) 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $x \leq y$ かつ $y \leq z$ と仮定する.

$$\text{このとき, } x+y = y \text{ かつ } y+z = z.$$

$$\text{ゆえに, } z = y+z = (x+y)+z.$$

$$\text{結合則から, } (x+y)+z = x+(y+z) \text{ だから, } z = x+(y+z) = x+z.$$

ゆえに, $x \leq z$ だから, \leq は推移的である.

37

証明(続き4)

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y, x \cdot y$ が定義され, かつ, それらは交換則, 結合則, 吸収則を満たすとする. このとき,

$$x \leq y \text{ iff } x+y=y$$

と定義すれば, (A, \leq) は束である.

- b) 「任意の $x, y \in A$ に対して, $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」を示す.
 - b-1) 「任意の $x, y \in A$ に対して, $\{x, y\}$ の上限が存在する」と
 - b-2) 「任意の $x, y \in A$ に対して, $\{x, y\}$ の下限が存在する」を示す.
 - b-1-1) 「 $x+y$ が $\{x, y\}$ の上界である」を示す.
 - b-1-2) 「 $x+y$ は $\{x, y\}$ の最小上界である」を示す.
 - b-1-1-1) 「 $x \leq x+y$ 」と
 - b-1-1-2) 「 $y \leq x+y$ 」の両方を示す.

b-1-1-1) 任意の $x, y \in A$ に対して,

$$x+y = (x+x)+y \quad (\text{冪等則})$$

$$= x+(x+y) \quad (\text{結合則})$$

ゆえに, $x \leq x+y$.

38

証明(続き5)

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y, x \cdot y$ が定義され, かつ, それらは交換則, 結合則, 吸収則を満たすとする. このとき,

$$x \leq y \text{ iff } x+y=y$$

と定義すれば, (A, \leq) は束である.

- b-1) 「任意の $x, y \in A$ に対して, $\{x, y\}$ の上限が存在する」を示す.
 - b-1-1) 「 $x+y$ が $\{x, y\}$ の上界である」を示す.
 - b-1-1-1) 「 $x \leq x+y$ 」と
 - b-1-1-2) 「 $y \leq x+y$ 」の両方を示す.

b-1-1-2) 任意の $x, y \in A$ に対して,

$$x+y = y+x \quad (\text{交換則})$$

$$= (y+y)+x \quad (\text{冪等則})$$

$$= y+(y+x) \quad (\text{結合則})$$

$$= y+(x+y) \quad (\text{交換則})$$

ゆえに, $y \leq x+y$.

b-1-1) ゆえに, $x+y$ は $\{x, y\}$ の上界である.

39

証明(続き6)

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y, x \cdot y$ が定義され, かつ, それらは交換則, 結合則, 吸収則を満たすとする. このとき,

$$x \leq y \text{ iff } x+y=y$$

と定義すれば, (A, \leq) は束である.

- b-1) 「任意の $x, y \in A$ に対して, $\{x, y\}$ の上限が存在する」を示す.
 - b-1-1) 「 $x+y$ が $\{x, y\}$ の上界である」を示す.
 - b-1-2) 「 $x+y$ は $\{x, y\}$ の最小上界である」を示す.
 - 「 $\{x, y\}$ の任意の上界 u に対して, $x+y \leq u$ 」を示す.

b-1-2) $\{x, y\}$ の任意の上界 u に対して, $x \leq u, y \leq u$.

ゆえに, \leq の定義から, $x+u = u, y+u = u$.

ここで, $(x+y)+u = x+(y+u) = x+u = u$ だから, $x+y \leq u$.

したがって, $x+y$ は $\{x, y\}$ の最小上界である.

b-1) 以上から, 任意の $x, y \in A$ に対して, $\{x, y\}$ の上限が存在する.

b-2) 同様に, 任意の $x, y \in A$ に対して, $\{x, y\}$ の下限が存在する.

a), b) から, (A, \leq) は束である.

40

定理(まとめ)

半順序集合 (A, \leq) に関して, 次の (1)~(3) は互いに同値である.

(1) (A, \leq) は束である

(A の任意の有限部分集合に上限と下限が存在する).

(2) 任意の $x, y \in A$ に対して, $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する.

(3) 任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y, x \cdot y$ が定義され, かつ,

それらは交換則, 結合則, 吸収則, および,

$$x \leq y \text{ iff } x+y=y$$

を満たす.

- (2), (3) を束の定義とする場合もある.

41

まとめ

- 今回の講義

- 束

- 次回の講義

- 関数(教科書 pp.3-5, 26-28)

- 今回の演習

- 同値関係

42