離散数学及び演習
講義 3　　2016. 4.28（木）

同値関係
（教科書　pp.12-16）
半順序
（教科書　19-23）

2 項関係の性質（復習）

集合 A 上の 2 項関係 $R \subseteq A^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in A \}$

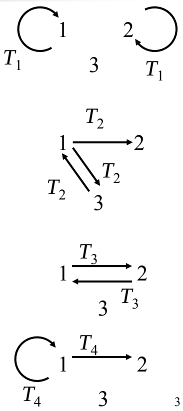
- R は反射的（reflexive）である
  - 任意の $x \in A$ に対して，$(x, x) \in R$
- R は対称的（symmetric）である
  - 任意の $x, y \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ ならば $(y, x) \in R$
- R は反対称的（antisymmetric）である
  - 任意の $x, y \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ かつ $(y, x) \in R$ ならば，$x = y$
- R は推移的（transitive）である
  - 任意の $x, y, z \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ ならば，$(x, z) \in R$

2

対称的な関係・反対称的な関係

例：　$A = \{ 1, 2, 3 \}$

- $T_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$
  - T_1 は対称的かつ反対称的である．
- $T_2 = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$
  - T_2 は対称的でも反対称的でもない．（$1 \neq 3$）
- $T_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}$
  - T_3 は対称的であり，反対称的でない．（$1 \neq 2$）
- $T_4 = \{(1, 1), (1, 2)\}$
  - T_4 は対称的でなく，反対称的である．



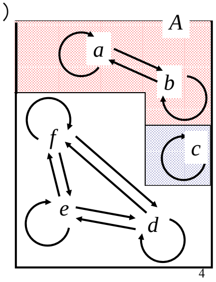
3

同値関係（equivalence relation）

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の同値関係である
  - R は反射的，対称的，かつ推移的である
- $x\,R\,y$ … $x \equiv_R y$，$x \sim_R y$
  （R の意味で x と y は等しい）

例：　$A = \{ a, b, c, d, e, f \}$
$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, e), (d, f), (e, d), (e, e), (e, f), (f, d), (f, e), (f, f)\}$

- R は反射的，対称的，かつ推移的だから，R は同値関係である



4

同値関係（続き）

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の同値関係である
  - R は反射的，対称的，かつ推移的である
- 例：　A：　平面上のすべての三角形からなる集合
  $R = \{(x, y) \mid x$ と y は相似 $\} \subseteq A^2$
  - R は反射的，対称的，かつ推移的だから，R は同値関係である．
- 例：　$R = \{(m, n) \mid m$ と n は 3 で割った余りが等しい $\} \subseteq \mathbf{N}^2$
  - $1\,R\,4$, $1\,R\,7$, …$2\,R\,5$, $2\,R\,8$, …, $3\,R\,6$, $3\,R\,9$, …
  - R は反射的，対称的，かつ推移的だから，R は同値関係である．
  - $m\,R\,n$ … $m \equiv_R n$，$m \equiv_3 n$，$m \equiv n \pmod 3$
    （m と n は 3 を法（modulo）として等しい（合同である））

5

整数を法とする合同関係

$\mathbf{Z}$ … すべての整数（integer，ganze Zahl）からなる集合

- 整数 p を法（modulo）とする合同関係 $\equiv_p$
  - $\equiv_p = \{(m, n) \mid m$ と n は p で割ったときの余りが等しい $\}$ $(\subseteq \mathbf{Z}^2)$
    - m を p で割ったときの商は d で，余りは r である … $m = d \cdot p + r$
    - ある $d_1, d_2 \in \mathbf{Z}$ に対して，$m = d_1 \cdot p + r$, $n = d_2 \cdot p + r$ だから，$m - n = (d_1 - d_2) \cdot p$, $d_1 - d_2 \in \mathbf{Z}$
  - $\equiv_p = \{(m, n) \mid m - n$ は p の倍数である $\}$
    $= \{(m, n) \mid$ ある $d \in \mathbf{Z}$ に対して，$m - n = d \cdot p \}$
  - $m \equiv_p n$,　$m \equiv n \pmod p$
    （m と n は p を法として等しい（合同である））

例：

- $365 \equiv_7 1$,　　$365 \equiv 1 \pmod 7$
- $1000 \equiv_{13} -1$,　$1000 \equiv -1 \pmod{13}$

6

定理

整数 p を法とする合同関係 $\equiv_p$ は，$\mathbf{Z}$ 上の同値関係である．

証明

整数 p を法とする合同関係 $\equiv_p$ は，$\mathbf{Z}$ 上の同値関係である．

- $\equiv_p$ は反射的，対称的，かつ推移的であることを示す．
  - a)「任意の $m \in \mathbf{Z}$ に対して，$m \equiv_p m$」を示す．
  - b)「任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ に対して，$m \equiv_p n$ ならば $n \equiv_p m$」を示す．
  - c)「任意の $m, n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，$m \equiv_p n$ かつ $n \equiv_p k$ ならば，$m \equiv_p k$」を示す．

---

a)　任意の $m \in \mathbf{Z}$ に対して，$m-m=0=0 \cdot p$ だから，$m \equiv_p m$．

b)　任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ に対して，$m \equiv_p n$ と仮定する．
　このとき，ある $d \in \mathbf{Z}$ に対して，$m-n=d \cdot p$ だから，$n-m=(-d) \cdot p$．
　$-d \in \mathbf{Z}$ だから，$n \equiv_p m$．

c)　任意の $m, n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，$m \equiv_p n$ かつ $n \equiv_p k$ と仮定する．
　ゆえに，ある $d, d' \in \mathbf{Z}$ に対して，$m-n=d \cdot p$ かつ $n-k=d' \cdot p$．
　このとき，$m-k=(m-n)+(n-k)=(d+d') \cdot p$．
　$d+d' \in \mathbf{Z}$ だから，$m \equiv_p k$．

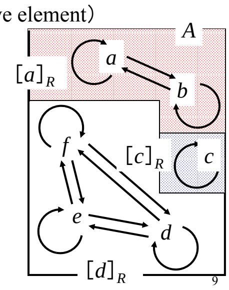
以上から，$\equiv_p$ は反射的，対称的，かつ推移的だから，$\equiv_p$ は同値関係である．

同値類（equivalent class）

- 集合 A 上の同値関係 R による $a \in A$ の同値類 $[a]_R$
  - $[a]_R = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}$
    $= \{x \in A \mid a \equiv_R x\}$
  - a … $[a]_R$ の代表元（representative element）

例：

- $[a]_R = [b]_R = \{a, b\}$
- $[c]_R = \{c\}$
- $[d]_R = [e]_R = [f]_R = \{d, e, f\}$

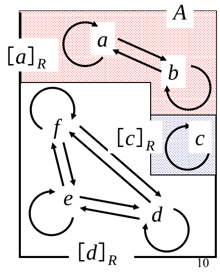


同値分割（equivalent partition）

- 集合 A 上の同値関係 R による A の同値分割 A/R
  （同値類系，商集合（quotient set））
  - $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$
    - R によるすべての同値類からなる集合

例：$[a]_R = [b]_R = \{a, b\}$
　　$[c]_R = \{c\}$
　　$[d]_R = [e]_R = [f]_R = \{d, e, f\}$

- $A/R = \{[a]_R, [b]_R, [c]_R, [d]_R, [e]_R, [f]_R\}$
  $= \{[a]_R, [c]_R, [d]_R\}$
  $= \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e, f\}\}$



同値分割（続き）

- 集合 A 上の同値関係 R による A の同値分割 A/R
  - $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$

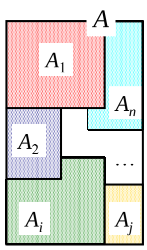
例：　$R = \{(x, y) \mid x$ と y は 3 で割った余りが等しい$\} \subseteq \mathbf{N}^2$

- $[1]_R = [4]_R = [7]_R = \ldots = \{1, 4, 7, \ldots\}$
  $[2]_R = [5]_R = [8]_R = \ldots = \{2, 5, 8, \ldots\}$
  $[3]_R = [6]_R = [9]_R = \ldots = \{3, 6, 9, \ldots\}$
- $\mathbf{N}/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$
  $= \{\{1, 4, 7, \ldots\},$
  $\{2, 5, 8, \ldots\},$
  $\{3, 6, 9, \ldots\}\}$

$\mathbf{N}$					
$[1]_R$	1	4	7	10	…
$[2]_R$	2	5	8	11	…
$[3]_R$	3	6	9	12	…

集合の分割（partition）

- 集合 $A(\neq \phi)$ の分割（直和分割）π
  - 次の(1)～(3)を満たす集合のクラス $\pi = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$
  （1）　任意の $A_i \in \pi$ に対して，$A_i \neq \phi$．
  （2）　$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.
  （3）　任意の $A_i, A_j \in \pi$ に対して，
  　　$A_i \neq A_j$ ならば $A_i \cap A_j = \phi$．
  - A を互いに素な非空部分集合に分けること
  - $A_1, A_2, \ldots, A_n$ … 分割 π のブロック



定理

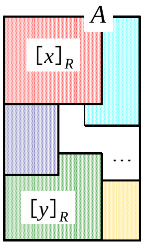
集合 A ($\neq \phi$) 上の同値関係 R による A の同値分割 A/R は, A の分割である.

- A/R が条件(1)〜(3)を満たすことを示す.

(1) 任意の$[x]_R \in A/R$ に対して, $[x]_R \neq \phi$.

(2) $\bigcup_{x\in A} [x]_R = A$.

(3) 任意の$[x]_R$, $[y]_R \in A/R$に対して,
$[x]_R \neq [y]_R$ ならば $[x]_R \cap [y]_R = \phi$.

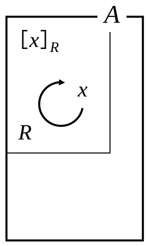


13

証明

(1) 任意の$[x]_R \in A/R$ に対して, $[x]_R \neq \phi$.

R は同値関係だから反射的であり, 任意の $x \in A$ に対して, $(x, x) \in R$.
ゆえに, $x \in [x]_R$.
$A \neq \phi$ だから, $x \in A$ は必ず存在する.
したがって, $[x]_R \neq \phi$.



14

証明(続き)

(2) $\bigcup_{x\in A} [x]_R = A$

- 1) 「$\bigcup_{x\in A} [x]_R \subseteq A$」と
- 2) 「$A \subseteq \bigcup_{x\in A} [x]_R$」の両方を示す.
- 1) 「任意の $y \in \bigcup_{x\in A}[x]_R$ に対して, $y \in A$」と
- 2) 「任意の $y \in A$ に対して, $y \in \bigcup_{x\in A}[x]_R$」を示す.

1) 任意の $y \in \bigcup_{x\in A}[x]_R$ に対して, ある x'が存在して, $y \in [x']_R$.
このとき, $(x', y) \in R \subseteq A^2$ だから, $y \in A$.
ゆえに, $\bigcup_{x\in A} [x]_R \subseteq A$.
2) 任意の $y \in A$ に対して, R は反射的だから $(y, y) \in R$.
$y \in [\,y\,]_R \subseteq \bigcup_{x\in A} [x]_R$ だから, $A \subseteq \bigcup_{x\in A} [x]_R$.
1), 2)から, $\bigcup_{x\in A} [x]_R = A$.

15

証明(続き2)

(3) 任意の$[x]_R$, $[y]_R \in A/R$ に対して,
$[x]_R \neq [y]_R$ ならば $[x]_R \cap [y]_R = \phi$.

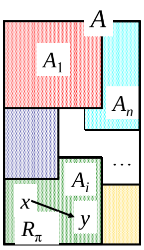
- 「$[x]_R \cap [y]_R \neq \phi$ ならば $[x]_R = [y]_R$」(対偶)を示す.
  - 「$[x]_R \cap [y]_R \neq \phi$」を仮定して,
  「$[x]_R \subseteq [y]_R$」かつ「$[y]_R \subseteq [x]_R$」を示す.

$[x]_R \cap [y]_R \neq \phi$ と仮定する. このとき, ある $a \in [x]_R \cap [y]_R$ が存在する.
ゆえに, $a \in [x]_R$ かつ $a \in [y]_R$ だから, $(x, a) \in R$ かつ $(y, a) \in R$.
R は対称的だから, $(a, x) \in R$.
さらに, R は推移的だから, $(y, x) \in R$.
1) 任意の $z \in [x]_R$ に対して, $(x, z) \in R$.
R は推移的だから, $(y, z) \in R$.
ゆえに, $z \in [y]_R$ だから, $[x]_R \subseteq [y]_R$.
2) 同様に, $[y]_R \subseteq [x]_R$.
1), 2)から, $[x]_R = [y]_R$.

16

分割が定める同値関係

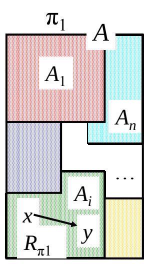
- 集合 A の分割$\pi = \{ A_1, \ldots, A_n \}$ が定める A 上の同値関係 R_π
  - $R_\pi = \{ (x, y) \mid$ ある $A_i \in \pi$ が存在して, $x, y \in A_i \}$
  - $(x, y) \in R_\pi$
  … πの同じブロックに属している
- R_πは反射的, 対称的, かつ推移的(すなわち, 同値関係)である.

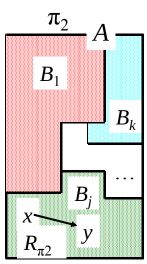


17

分割の細分(refinement)

- 集合 A の分割 π_1, π_2 に対して, π_1はπ_2の細分である.
  - π_1, π_2 がそれぞれ定める A 上の同値関係 $R_{\pi 1}$, $R_{\pi 2}$ に対して, $R_{\pi 1} \subseteq R_{\pi 2}$.
  - 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in R_{\pi 1}$ ならば $(x, y) \in R_{\pi 2}$.
  - π_1はπ_2 より細かい
  - π_2 はπ_1 より粗い



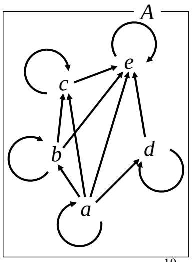


18

半順序(partial order)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の半順序である
  - R は反射的，反対称的，かつ推移的である
- $x\,R\,y$ … $x \leq_R y$，$x \sqsubseteq_R y$
  (R の意味で y は x より大きい)
- 教科書では半順序のことを単に順序と表現している．

例：$A = \{ a, b, c, d, e \}$
$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, c), (b, e), (c, c), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e)\}$
- R は反射的，反対称的，かつ推移的だから，R は半順序である



19

半順序(続き)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の半順序である
  - R は反射的，反対称的，かつ推移的である

例：$R = \{(m, n) \mid m$ は n を割り切る(n は m の倍数) $\} \subseteq \mathbf{N}^2$
$= \{(m, n) \mid$ ある $d \in \mathbf{N}$ が存在して，$n = d \cdot m\}$
$= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (2, 2), (2, 4), (2, 6), \ldots, (3, 3), (3, 6), (3, 9), \ldots\}$
- 任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して，$m = 1 \cdot m$ だから，R は反射的である．
- 任意の $m, n \in \mathbf{N}$ に対して，$m\,R\,n$ かつ $n\,R\,m$ と仮定する．
  このとき，ある $d, d' \in \mathbf{N}$ に対して，$n = d \cdot m$ かつ $m = d' \cdot n$．
  ゆえに，$m = d' \cdot (d \cdot m)$ だから，$d' \cdot d = 1$.
  $d, d' \in \mathbf{N}$ だから，$d = d' = 1$.
  ゆえに，$n = m$ だから，R は反対称的である．
- 任意の $m, n, k \in \mathbf{N}$ に対して，$m\,R\,n$ かつ $n\,R\,k$ と仮定する．
  このとき，ある $d, d' \in \mathbf{N}$ に対して，$n = d \cdot m$ かつ $k = d' \cdot n$．
  ゆえに，$k = d' \cdot (d \cdot m) = (d' \cdot d) \cdot m$．
  $d' \cdot d \in \mathbf{N}$ だから，$m\,R\,k$. ゆえに，R は推移的である．

20

半順序(続き2)

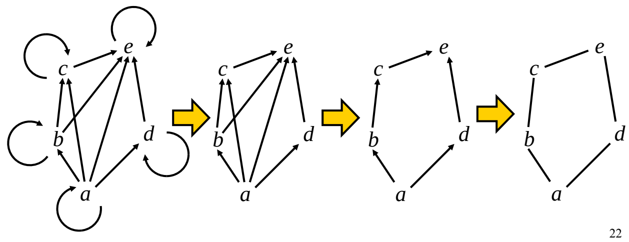
- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の半順序である
  - R は反射的，反対称的，かつ推移的である

例：$(m, n) \in \mathbf{N}^2$ … 英語の得点と数学の得点の対
$(m_1, n_1) \leq_R (m_2, n_2)$ iff $m_1 \leq m_2$ かつ $n_1 \leq n_2$
… 英語と数学の両方の得点が多い方が席次が上位
- $(50, 80) \leq_R (80, 100)$
- $(50, 80)$ と $(80, 50)$ の間に順序は付かない
- R は反射的，反対称的，かつ推移的だから，半順序である．
  - 半順序では，すべての要素の間に順序が付いているとは限らない．
- $R = \{((m_1, n_1), (m_2, n_2)) \mid m_1 \leq m_2$ かつ $n_1 \leq n_2\} \subseteq (\mathbf{N}^2)^2$
  - $((50, 80), (80, 100)) \in R$
  - $((50, 80), (80, 50)) \notin R$

21

Hasse 図

- 半順序のグラフ表現における約束
  - 半順序は反射的かつ推移的
    - それらを表す矢印を省略
  - 半順序は反対称的
    - 矢印は上向きと約束し，矢を省略



22

全順序(total order)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ に対して，x と y ($x, y \in A$) は比較可能(comparable)である
  - $(x, y) \in R$ または $(y, x) \in R$
- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の全順序(total order)である
  - R は A 上の半順序であり，かつ，任意の $x, y \in A$ に対して，x と y は比較可能である

例：大小関係 $\leq$ は $\mathbf{N}$ 上の全順序である．
- $\leq$ は $\mathbf{N}$ 上の半順序であり，かつ，任意の $m, n \in \mathbf{N}$ に対して，m と n は比較可能である．

23

順序集合(ordered set)

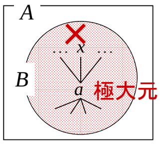
- 対 (A, R) は半順序集合(partial order set)である
  - 2 項関係 R は A 上の半順序である
- 対 (A, R) は全順序集合(total order set)である
  - 2 項関係 R は A 上の全順序である

24

極大元・極小元

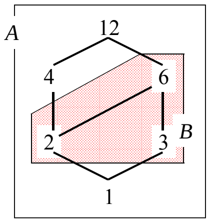
半順序集合 $(A, \leq)$，$B \subseteq A$ に対して，

- $a \in B$ は B の極大元（maximal element）である
  - $a \leq x$ かつ $a \neq x$ であるような $x \in B$ は存在しない
- $a \in B$ は B の極小元（minimal element）である
  - $x \leq a$ かつ $a \neq x$ であるような $x \in B$ は存在しない



例：$(A, \leq)$：右図，$B = \{2, 3, 6\}$

- B の極大元　…　6
- B の極小元　…　2, 3

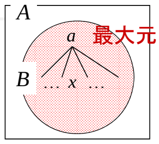


- 極大（小）元は複数存在することがある
- 異なる 2 つの極大（小）元は比較可能でない

最大元・最小元

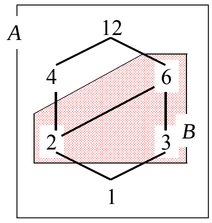
半順序集合 $(A, \leq)$，$B \subseteq A$ に対して，

- $a \in B$ は B の最大元（maximum element）である
  … $a = \max B$
  - 任意の $x \in B$ に対して，$x \leq a$
- $a \in B$ は B の最小元（minimum element）である
  … $a = \min B$
  - 任意の $x \in B$ に対して，$a \leq x$



例：$(A, \leq)$：右図，$B = \{2, 3, 6\}$

- B の最大元　…　6
- B の最小元　…　存在しない



- 最大（小）元は存在するとは限らない
- 最大（小）元は存在すれば唯一である

定理

半順序集合 $(A, \leq)$ に対して，$B \subseteq A$ の最大（小）元は，存在すれば唯一である

証明

半順序集合 $(A, \leq)$ に対して，$B \subseteq A$ の最大（小）元は，存在すれば唯一である

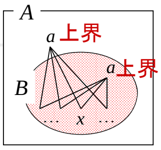
- 最大元は唯一でないと仮定して，矛盾を導く．
  - 最大元は 2 つ存在すると仮定して，それらが同一であることを示す．

B の最大元は 2 つ存在すると仮定する．
そこで，$b_1, b_2 \in B$（$b_1 \neq b_2$）を B の最大元とする．
b_1 は最大元だから，任意の $x \in B$ に対して，$x \leq b_1$．特に，$b_2 \leq b_1$．
b_2 も最大元だから，任意の $x \in B$ に対して，$x \leq b_2$．特に，$b_1 \leq b_2$．
ところが，$\leq$ は半順序だから反対称的である．
ゆえに，$b_1 = b_2$．これは矛盾．
すなわち，B の最大元は，存在すれば唯一である．
同様に，B の最小元は，存在すれば唯一である．

上界，上限

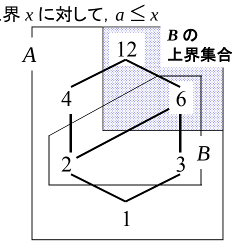
半順序集合 $(A, \leq)$，$B \subseteq A$ に対して，

- $a \in A$ は B の上界（upper bound）である
  - 任意の $x \in B$ に対して，$x \leq a$
- $a \in A$ は B の最小上界（least upper bound）（上限（supremum））である　…　$a = \mathrm{lub}\, B$，$\sup B$
  - a は B の上界であり，かつ，B の任意の上界 x に対して，$a \leq x$



例：$(A, \leq)$：右図，$B = \{2, 3, 6\}$

- B の上界　…　6, 12
- B の上限　…　6

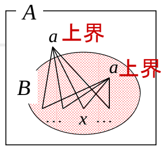


- 上限は上界集合の最小元である

上界，上限（続き）

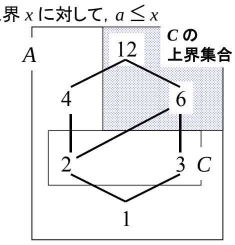
半順序集合 $(A, \leq)$，$B \subseteq A$ に対して，

- $a \in A$ は B の上界（upper bound）である
  - 任意の $x \in B$ に対して，$x \leq a$
- $a \in A$ は B の最小上界（least upper bound）（上限（supremum））である　…　$a = \mathrm{lub}\, B$，$\sup B$
  - a は B の上界であり，かつ，B の任意の上界 x に対して，$a \leq x$



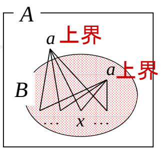
例：$(A, \leq)$：右図，$C = \{2, 3\}$

- C の上界　…　6, 12
- C の上限　…　6（$\notin C$）



- 上限は上界集合の最小元である

上界，上限(続き2)

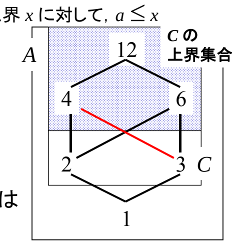


半順序集合$(A,\leq)$，$B\subseteq A$ に対して，

- $a\in A$ は B の上界(upper bound)である
  - 任意の $x\in B$ に対して，$x\leq a$
- $a\in A$ は B の最小上界(least upper bound)(上限(supremum))である　…　$a=\mathrm{lub}\ B$，$\sup B$
  - a は B の上界であり，かつ，B の任意の上界 x に対して，$a\leq x$

例：$(A,\leq)$：右図，$C=\{2, 3\}$

- C の上界　…　4, 6, 12
- C の上限　…　なし



- 上限は上界集合の最小元である
- 上界が存在しても，上限が存在するとは限らない．

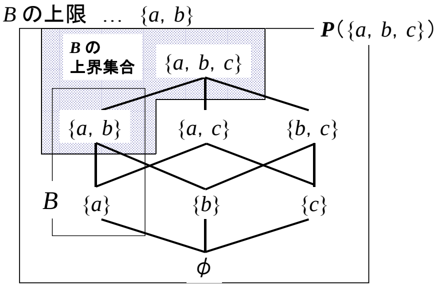
31

上界，上限(続き3)

例：半順序集合$(\boldsymbol{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$

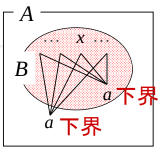
$B=\{\{a\}, \{a, b\}\}$

- B の上界　…　$\{a, b\}$，$\{a, b, c\}$
- B の上限　…　$\{a, b\}$



32

下界，下限

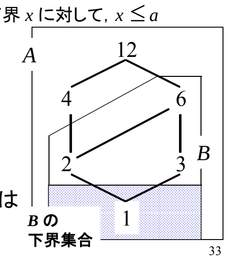


半順序集合$(A,\leq)$，$B\subseteq A$ に対して，

- $a\in A$ は B の下界(lower bound)である
  - 任意の $x\in B$ に対して，$a\leq x$
- $a\in A$ は B の最大下界(greatest lower bound)(下限(infimum))である　…　$a=\mathrm{glb}\ B$，$\inf B$
  - a は B の下界であり，かつ，B の任意の下界 x に対して，$x\leq a$

例：$(A,\leq)$：右図，$B=\{2, 3, 6\}$

- B の下界　…　1
- B の下限　…　1



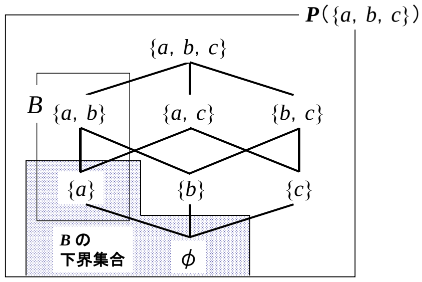
- 下限は下界集合の最大元である
- 下界が存在しても，下限が存在するとは限らない．

33

下界，下限(続き)

例：半順序集合$(\boldsymbol{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$，$B=\{\{a\}, \{a, b\}\}$

- B の下界　…　$\{a\}$，ϕ
- B の下限　…　$\{a\}$



34

定理

半順序集合$(A,\leq)$，$B\subseteq A$ に対して，次の(1)，(2)が成り立つ．

(1)　$\sup B\in B$ ならば，$\sup B=\max B$.

(2)　$\inf B\in B$ ならば，$\inf B=\min B$.

35

まとめ

- 今回の講義
  - 同値関係
  - 半順序
- 次回の講義
  - 束(教科書　pp.16-19)
- 今回の演習
  - 2 項関係の性質

36