

離散数学及び演習
講義 2 2016. 4.21(木)

直積・関係
2 項関係の性質
(教科書 pp.9-12)

順序対 (ordered pair)

- 順序対
 - 決められた順序に並べられた対象からなる対
 - 対象 a と対象 b からなる順序対 (a, b)
 - a ... 第 1 成分 (1st component)
 - b ... 第 2 成分 (2nd component)
- 例:
 - $(2, 5), (-3, 2.5)$... 座標平面上の点
 - $(\text{太郎}, 100), (\text{次郎}, 50)$... 学生とその得点
 - $(\text{太郎}, \text{花子}), (\text{太郎}, \text{次郎})$... 兄弟・姉妹・兄妹・姉弟
- 一般に, $(a, b) \neq (b, a)$
 - cf. $\{a, b\} = \{b, a\}$
- (a, a) も順序対
 - cf. $\{a, a\} = \{a\}$

2

等しい順序対

- 順序対 (a, b) と順序対 (c, d) は等しい (equal)
 - ($(a, b) = (c, d)$)
 - $a=c$ かつ $b=d$
 - 各成分がそれぞれ等しい

3

n 項組 (n -tuple)

- n 項組
 - 決められた順序に並べられた n 個の対象からなる列
(a_1, a_2, \dots, a_n)
 - 対象 a_i ... 第 i 成分 (i -th component)
 - 2 項組 ... 順序対のこと
- n 項組 (a_1, a_2, \dots, a_n) と n 項組 (b_1, b_2, \dots, b_n) は等しい
 - 任意の i ($i=1, \dots, n$) に対して, $a_i = b_i$

4

直積 (cartesian product)

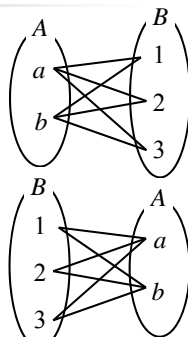
- 集合 A と集合 B の直積
 - $A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B \}$

例: $A = \{ a, b \}, B = \{ 1, 2, 3 \}$

- $A \times B = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$
- $B \times A = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$

■ 一般に, $A \times B \neq B \times A$.

- $A \times A = A^2 = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b) \}$



5

直積 (続き)

- 集合 A_1, \dots, A_n の直積
 - $A_1 \times \dots \times A_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in A_i, i=1, \dots, n \}$

■ $A_1 = \dots = A_n (= A)$ のとき

- $A_1 \times \dots \times A_n = A^n$

例: $A = \{ a, b \}$

- $A \times A \times A = A^3$
 - $= \{ (a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b) \}$

6

定理

- 集合 A, B, C に対して, 次の(1), (2)が成り立つ.
 - (1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 - (2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- 有限集合 A, B に対して,

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

7

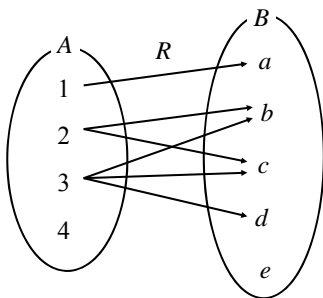
2 項関係 (binary relation)

- 集合 A から集合 B への 2 項関係 R
 - $R \subseteq A \times B$
- 例: $A = \{1, 2, 3, 4\}$... 学生の集合
 $B = \{a, b, c, d, e\}$... 科目の集合
- 順序対 $(1, a)$... 学生 1 は科目 a を受講している
 - $A \times B$... 学生と科目のすべての組み合わせからなる集合
 - $R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$
 $\subseteq A \times B$
 ... 学生とその学生が受講している科目

8

2 項関係のグラフ表現

$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d, e\}$
 $R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$
 $\subseteq A \times B$



9

2 項関係 (続き)

- 集合 A から集合 A への 2 項関係 $R \subseteq A \times A$
- $R \subseteq A \times A = A^2$... 集合 A 上の 2 項関係
- $(a, b) \in R$... $a R b$

- 例: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (すべての自然数からなる集合)
 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (2, 3), (2, 4), \dots\} \subseteq \mathbb{N}^2$
- $(1, 2) \in R$... 1 は 2 より真に小さい
 - $1 R 2, 1 R 3, 1 R 4, \dots, 2 R 3, 2 R 4, \dots$
 - R の代わりに $<$ を使うと ... $1 < 2, 1 < 3, 1 < 4, \dots$
 - $< = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (2, 3), (2, 4), \dots\} \subseteq \mathbb{N}^2$

10

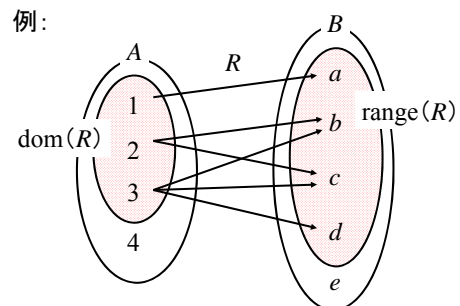
2 項関係の定義域, 値域

- 2 項関係 $R \subseteq A \times B$ に対して,
- R の定義域 (domain)
 - $\text{dom}(R) = \{x \in A \mid \text{ある } y \in B \text{ に対して, } x R y\}$
 - R の値域 (range)
 - $\text{range}(R) = \{y \in B \mid \text{ある } x \in A \text{ に対して, } x R y\}$

11

2 項関係の定義域, 値域 (続き)

- $\text{dom}(R) = \{x \in A \mid \text{ある } y \in B \text{ に対して, } x R y\}$
- $\text{range}(R) = \{y \in B \mid \text{ある } x \in A \text{ に対して, } x R y\}$



12

n 項関係 (n -ary relation)

- 集合 A_1, \dots, A_n の間の n 項関係 R
 - $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$
- $R \subseteq A \times \dots \times A = A^n$... 集合 A 上の n 項関係

例: \mathbf{R} ... すべての実数からなる集合

$$L = \{ (x, y, z) \mid \frac{x}{2} = y = \frac{z}{3} \} \subseteq \mathbf{R}^3$$

... \mathbf{R} 上の 3 項関係
(座標空間上の直線)

13

関係の演算

- 2 項関係 $R_1, R_2 \subseteq A \times B$
 - $R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2, R_1 - R_2$

例: $A = \{1, 2, 3, 4\}$... 学生の集合
 $B = \{a, b, c, d, e\}$... 科目の集合
 $R_1 = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$
 ... 学生とその学生が受講している科目
 $R_2 = \{(1, a), (1, d), (2, b), (3, b), (4, d), (4, e)\}$
 ... 学生とその学生が興味を持っている科目

- $R_1 \cap R_2 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$
 ... 学生とその学生が興味を持って受講している科目
- $R_1 - R_2 = \{(2, c), (3, c), (3, d)\}$
 ... 学生とその学生が受講しているが興味のない科目

14

逆関係 (inverse)

- 2 項関係 $R \subseteq A \times B$ の逆関係 R^{-1}
 - $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} (\subseteq B \times A)$

例: $A = \{1, 2, 3, 4\}$... 学生の集合
 $B = \{a, b, c, d, e\}$... 科目の集合
 $R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$
 ... 学生とその学生が受講している科目

- $R^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
 ... 科目とそれを受講している学生

15

補関係 (complement)

- 2 項関係 $R \subseteq A \times B$ の補関係
 - $R^c = (A \times B) - R (\subseteq A \times B)$

例: $A = \{1, 2, 3, 4\}$... 学生の集合
 $B = \{a, b, c, d, e\}$... 科目の集合
 $R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$
 ... 学生とその学生が受講している科目

- $R^c = \{(1, b), (1, c), (1, d), (1, e),$
 $(2, a), (2, d), (2, e), (3, a), (3, e),$
 $(4, a), (4, b), (4, c), (4, d), (4, e)\}$
 ... 学生とその学生が受講していない科目

16

定理

2 項関係 $R, S \subseteq A \times B$ に対して, 次の (1) ~ (5) が成り立つ.

- (1) $(R^{-1})^{-1} = R$
- (2) $R \subseteq S$ ならば, $R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- (3) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- (4) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
- (5) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

17

証明

- (3) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- a) 「 $(R \cup S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cup S^{-1}$ 」と
 - b) 「 $R^{-1} \cup S^{-1} \subseteq (R \cup S)^{-1}$ 」の両方を示す.
 - a) 「任意の $(x, y) \in (R \cup S)^{-1}$ に対して, $(x, y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$ 」を示す.
-
- a) 任意の $(x, y) \in (R \cup S)^{-1}$ に対して, $(y, x) \in R \cup S$.
 ゆえに, $(y, x) \in R$, または, $(y, x) \in S$.
 このとき, $(x, y) \in R^{-1}$, または, $(x, y) \in S^{-1}$ だから,
 $(x, y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$.
 したがって, $(R \cup S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cup S^{-1}$.

18

証明(続き)

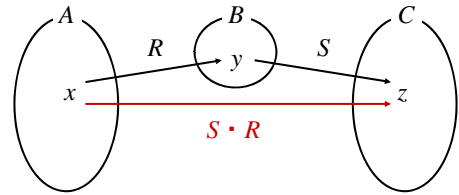
- (3) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- a) $\lceil (R \cup S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cup S^{-1} \rceil$ と
 - b) $\lceil R^{-1} \cup S^{-1} \subseteq (R \cup S)^{-1} \rceil$ の両方を示す.
 - b) \lceil 任意の $(x, y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$ に対して, $(x, y) \in (R \cup S)^{-1}$ \rceil を示す.

b) 任意の $(x, y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$ に対して,
 $(x, y) \in R^{-1}$, または, $(x, y) \in S^{-1}$.
 ゆえに, $(y, x) \in R$, または, $(y, x) \in S$.
 このとき, $(y, x) \in R \cup S$ だから, $(x, y) \in (R \cup S)^{-1}$.
 したがって, $R^{-1} \cup S^{-1} \subseteq (R \cup S)^{-1}$.

19

関係の合成 (composition)

- 2 項関係 $R \subseteq A \times B$ と 2 項関係 $S \subseteq B \times C$ の合成関係
 - $S \cdot R$
 $= \{(x, z) \mid \text{ある } y \in B \text{ に対して, } (x, y) \in R \text{ かつ } (y, z) \in S\}$
 $(\subseteq A \times C)$
 - $S \cdot R = \{(x, z) \mid \text{ある } y \in B \text{ に対して, } (x, y) \in S \text{ かつ } (y, z) \in R\}$
 と定義する場合もある



20

合成関係(続き)

- $S \cdot R = \{(x, z) \mid \text{ある } y \in B \text{ に対して, } (x, y) \in R, (y, z) \in S\}$

例: $A = \{1, 2, 3, 4\}$... 学生の集合
 $B = \{a, b, c, d, e\}$... 科目の集合
 $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$... 先生の集合
 $R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$
 ... 学生とその学生が受講している科目
 $S = \{(a, \alpha), (b, \beta), (b, \gamma), (c, \gamma), (d, \gamma)\}$
 ... 科目とそれを担当している先生
 $S \cdot R = \{(1, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma), (3, \beta), (3, \gamma)\}$
 ... 学生とその学生の受講科目を担当している先生

21

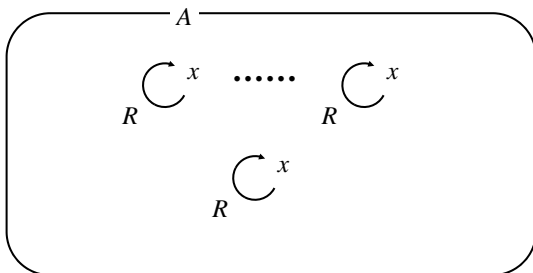
定理

- 2 項関係 $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C, T \subseteq C \times D$ に対して,
 $(T \cdot S) \cdot R = T \cdot (S \cdot R)$
 (関係の合成に関する結合則)
 が成り立つ.

22

反射的な関係

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は反射的(reflexive)である
 - 任意の $x \in A$ に対して, $(x, x) \in R$



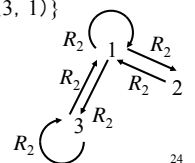
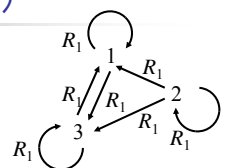
23

反射的な関係(続き)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は反射的である
 - 任意の $x \in A$ に対して, $(x, x) \in R$

例: $A = \{1, 2, 3\}$

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 1)\}$
 - $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \in R_1$
 - 任意の $x \in A$ に対して $(x, x) \in R_1$ だから, R_1 は反射的である.
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 3), (3, 1)\}$
 - $(2, 2) \notin R_2$ だから, R_2 は反射的でない.



24

反射的な関係(続き2)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は反射的である
 - 任意の $x \in A$ に対して, $(x, x) \in R$

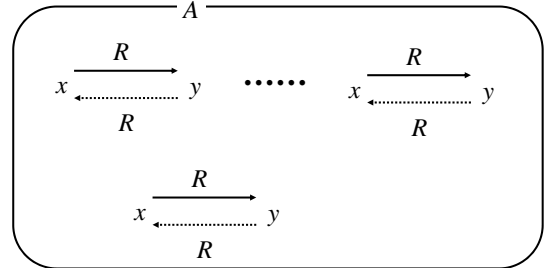
例: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

- $S_1 = \{(x, y) \in N^2 \mid x \text{ は } y \text{ を割り切る}\}$
 - 任意の $x \in N$ に対して $(x, x) \in S_1$ だから, S_1 は反射的である.
- $S_2 = \{(x, y) \in N^2 \mid x < y\}$
 - $(1, 1) \notin S_2$ ($1 < 1$ でない) だから, S_2 は反射的でない.
- $S_3 = \{(x, y) \in N^2 \mid x \leq y\}$ は反射的である.
 - 任意の $x \in N$ に対して, $x \leq x$.

25

対称的な関係

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は対称的 (symmetric) である
 - 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in R$ ならば $(y, x) \in R$



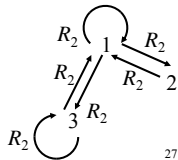
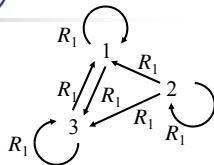
26

対称的な関係(続き)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は対称的である
 - 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in R$ ならば $(y, x) \in R$

例: $A = \{1, 2, 3\}$

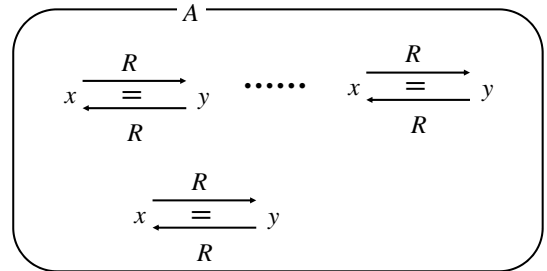
- $R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 1)\}$
 - $(2, 1) \in R_1$ であるが, $(1, 2) \notin R_1$ だから, R_1 は対称的でない.
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 3), (3, 1)\}$
 - $(1, 1) \in R_2$ に対して $(1, 1) \in R_2$,
 - $(1, 2) \in R_2$ に対して $(2, 1) \in R_2$,
 - $(2, 1) \in R_2$ に対して $(1, 2) \in R_2$,
 - ...
 - $(3, 1) \in R_2$ に対して $(1, 3) \in R_2$
 - ゆえに, R_2 は対称的である.



27

反対称的な関係

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は反対称的 (antisymmetric) である
 - 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in R$ かつ $(y, x) \in R$ ならば, $x = y$



28

反対称的な関係(続き)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は反対称的である
 - 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in R$ かつ $(y, x) \in R$ ならば, $x = y$

例: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

- $S_3 = \{(x, y) \in N^2 \mid x \leq y\}$
 - 任意の $x, y \in N$ に対して, $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば, $x = y$
 - ゆえに, S_3 は反対称的である.

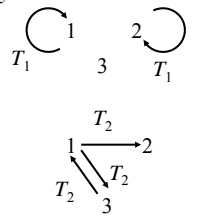
29

対称的な関係・反対称的な関係

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は対称的である
 - 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in R$ ならば $(y, x) \in R$
- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は反対称的である
 - 任意の $x, y \in A$ に対して, $(x, y) \in R$ かつ $(y, x) \in R$ ならば, $x = y$

例: $A = \{1, 2, 3\}$

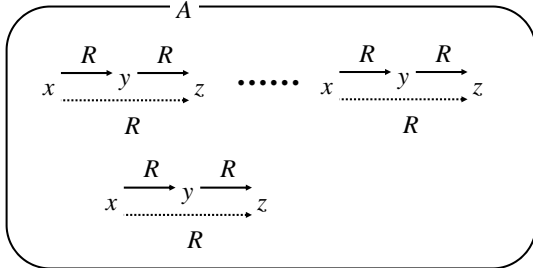
- $T_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$
 - T_1 は対称的かつ反対称的である.
- $T_2 = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$
 - T_2 は対称的でも反対称的でもない. ($1 \neq 3$)



30

推移的な関係

- 2項関係 $R \subseteq A^2$ は推移的 (transitive) である
 - 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ ならば, $(x, z) \in R$



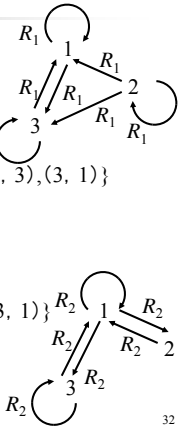
31

推移的な関係(続き)

- 2項関係 $R \subseteq A^2$ は推移的である
 - 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ ならば, $(x, z) \in R$

例: $A = \{1, 2, 3\}$

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 1)\}$
 - $(1, 1), (1, 3) \in R_1$ に対して $(1, 1) \in R_1$, $(2, 1), (1, 3) \in R_1$ に対して $(2, 3) \in R_1$.
 - $(3, 1), (1, 3) \in R_1$ に対して $(3, 3) \in R_1$
 - ゆえに, R_1 は推移的である.
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 3), (3, 1)\}$
 - $(2, 1), (1, 3) \in R_2$ に対して $(2, 3) \notin R_2$ だから, R_2 は推移的でない.



32

推移的な関係(続き2)

- 2項関係 $R \subseteq A^2$ は推移的である
 - 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ ならば, $(x, z) \in R$

例: A : すべての人からなる集合

- $R = \{(x, y) \mid y \text{ は } x \text{ の先祖である}\}$
 - R は推移的である.
- $S = \{(x, y) \mid y \text{ は } x \text{ の親である}\}$
 - S は推移的でない.

33

関係の冪(べき)

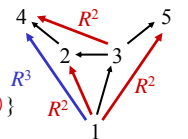
関係 $R \subseteq A^2$ に対して,

- $R^1 = R$
- $R^n = R \cdot R^{n-1} \quad (n \geq 2)$

例: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 5)\}$

- $R^1 = R$
- $R^2 = R \cdot R = \{(1, 2), (1, 5), (3, 4)\}$
- $R^3 = R \cdot R^2 = \{(1, 4)\}$
- $R^4 = R \cdot R^3 = \emptyset$



34

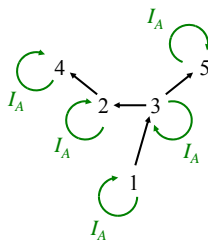
恒等関係

- A 上の恒等関係 (identity relation)
 - $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$

例: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 5)\}$

- $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$



35

推移閉包・反射推移閉包

関係 $R \subseteq A^2$ に対して,

- R の推移閉包 (transitive closure) R^+

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \quad (= R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots)$$

- R の反射推移閉包 (reflexive transitive closure) R^*

$$R^* = I_A \cup R^+$$

- $I_A = R^0$ とおくと,

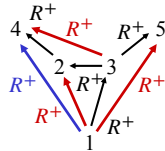
$$(1) \quad R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

$$(2) \quad R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$$

36

推移閉包(続き)

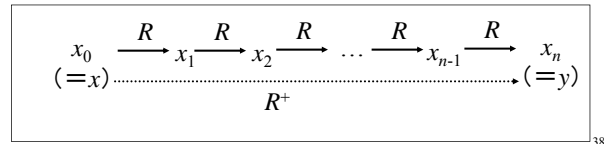
- 例1: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 5)\}$
- $R^1 = R$
 - $R^2 = R \circ R = \{(1, 2), (1, 5), (3, 4)\}$
 - $R^3 = R \circ R^2 = \{(1, 4)\}$
 - $R^4 = R \circ R^3 = \emptyset$
 - :
 - $R^+ = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \dots$
 $= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (3, 5)\}$



37

推移閉包(続き)

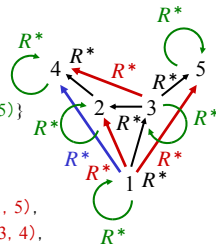
- 例2: $R = \{(x, y) \mid y \text{ は } x \text{ の先祖である}\}$
 $S = \{(x, y) \mid y \text{ は } x \text{ の親である}\}$
- R は S の推移閉包 ($R = S^+$)
 - 関係 $R \subseteq A^2$ の推移閉包
 - $R^+ = \{(x, y) \mid \text{ある } x_0, \dots, x_n (n \geq 1) \text{ に対して, } x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R (i=0, 1, \dots, n-1)\}$
 - 教科書では推移閉包を R^* で表している



38

反射推移閉包(続き)

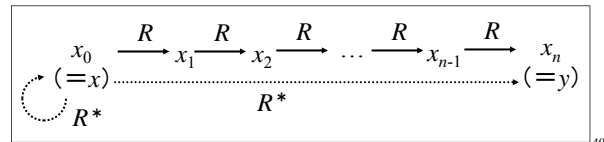
- 例1: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 5)\}$
- $R^+ = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \dots$
 $= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (3, 5)\}$
 - $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
 - $R^* = I_A \cup R^+$
 $= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (5, 5)\}$



39

反射推移閉包(続き)

- 例2: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, R = \{(x, y) \mid y = x + 1\} (\subseteq \mathbb{N}^2)$
- $R^+ = < = \{(x, y) \mid x < y\}$
 - $R^* = \leq = \{(x, y) \mid x \leq y\}$
 - 関係 $R \subseteq A^2$ の反射推移閉包
 - $R^* = \{(x, y) \mid \text{ある } x_0, \dots, x_n (n \geq 0) \text{ に対して, } x_0 = x, x_n = y, (x_i, x_{i+1}) \in R (i=0, 1, \dots, n-1)\}$
 - $x = y$ の場合でも, $(x, y) \in R^*$ とする



40

定理

- 関係 $R \subseteq A^2$ に対して, 次の(1), (2)が成り立つ.
- R^+ は推移的である.
 - R^* は反射的かつ推移的である.

41

まとめ

- 今回の講義
 - 直積・関係
 - 2項関係の性質
- 次回の講義
 - 同値関係(教科書 pp.19-23)
 - 半順序(教科書 pp.12-16)
- 今回の演習
 - 直積・関係

42